CPA および単位閉区間の上へ連続的に写せる実数の集合について

でぃぐ

2022 年 5 月 1 日

すうがく徒のつどい@オンライン 第 3 回

集合論の基本用語の確認

1. ZFC で選択公理を含めた Zermelo–Fraenkel の集合論の公理系を表す．
2. ω で自然数全体の集合を表す．
3. $\mathfrak{c}$ で連続体濃度を表す．すなわち $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.
4. 最小の非可算順序数を $\aleph_1$ または ω_1 で表す．
5. CH で連続体仮説，すなわち $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ という命題を表す．

この発表のメインテーマの一つ

Miller の原理

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

この発表のメインテーマの一つ

Miller の原理

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

1. $|f[S]| \leq |S|$ なので連続体濃度を持つという条件は外したら偽．

この発表のメインテーマの一つ

Miller の原理

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

1. $|f[S]| \leq |S|$ なので連続体濃度を持つという条件は外したら偽．
2. $[0,1]$ は $\mathbb{R}$ に変えたら偽 (コンパクトの連続像はコンパクト)．

この発表のメインテーマの一つ

Millerの原理

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

1. $|f[S]| \leq |S|$ なので連続体濃度を持つという条件は外したら偽．
2. $[0,1]$ は $\mathbb{R}$ に変えたら偽 (コンパクトの連続像はコンパクト)．
3. 測度や次元などの量は連続像によって増す可能性があるので，そのような道具で簡単に示せるわけでもなさそうだ．

この発表のメインテーマの一つ

Millerの原理

$S \subseteq \mathbb{R}$を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数$f : \mathbb{R} \to [0, 1]$があって$f[S] = [0, 1]$である．

本発表では，

- CHを仮定すると，Millerの原理の否定が成り立つことを軽く紹介する．

この発表のメインテーマの一つ

Millerの原理

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

本発表では，

- CH を仮定すると，Millerの原理の否定が成り立つことを軽く紹介する．
- CPA という公理を仮定すると，Millerの原理が成り立つことを紹介する．

よってMillerの原理がZFCから独立であることがわかる．

この発表のメインテーマの一つ

Millerの原理

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ があって $f[S] = [0, 1]$ である．

本発表では，

- CH を仮定すると，Millerの原理の否定が成り立つことを軽く紹介する．
- CPA という公理を仮定すると，Millerの原理が成り立つことを紹介する．

よって Millerの原理が ZFC から独立であることがわかる．

ただし ZFC が無矛盾なら ZFC+CPA も無矛盾なことは認める．

位相の話の復習

位相空間の空でなく孤立点のない閉集合を完全集合という．完全な完備可分距離空間をポーランド空間という．

位相の話の復習

位相空間の空でなく孤立点のない閉集合を完全集合という．完全な完備可分距離空間をポーランド空間という．
$2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れてその可算直積をとった空間をカントール空間といい，$\mathfrak{C}$ と書く．$\mathfrak{C}$ はポーランド空間である．

位相の話の復習

位相空間の空でなく孤立点のない閉集合を完全集合という．完全な完備可分距離空間をポーランド空間という．
$2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れてその可算直積をとった空間をカントール空間といい，$\mathfrak{C}$ と書く．$\mathfrak{C}$ はポーランド空間である．

定理 (Perfect set theorem)

ポーランド空間の任意の解析集合は非可算ならばカントール空間と同相な部分空間を含む．

解析集合とは，ボレル集合の射影で書ける集合である (特にすべてのボレル集合は解析集合)．

位相の話の復習

位相空間の空でなく孤立点のない閉集合を完全集合という．完全な完備可分距離空間をポーランド空間という．
$2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れてその可算直積をとった空間をカントール空間といい，$\mathfrak{C}$ と書く．$\mathfrak{C}$ はポーランド空間である．

定理 (Perfect set theorem)

ポーランド空間の任意の解析集合は非可算ならばカントール空間と同相な部分空間を含む．

解析集合とは，ボレル集合の射影で書ける集合である (特にすべてのボレル集合は解析集合)．

定理 (Tietze の拡張定理)

正規な位相空間 X の閉集合 A 上定義された実連続関数は定義域を X とする実連続関数に延長できる．

位相の話の復習

補題

ポーランド空間の完全集合は連続体濃度個の互いに素な完全集合の和に分解できる．

完全集合が $\mathfrak{C}$ の場合が本質的なのでその場合を証明する．しかし，$\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ と同相で，$\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ には次のような連続体濃度個の互いに素な完全集合があるのでよい：

$$A_a = \{(x, y) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} : x = a\} \text{ (for } a \in \mathfrak{C})$$

位相の話の復習

位相空間 X の部分集合 A が **meager** であるとは，A が内部が空な閉集合の可算個の和集合で覆うことができることを言う．

位相の話の復習

位相空間 X の部分集合 A が **meager** であるとは，A が内部が空な閉集合の可算個の和集合で覆うことができることを言う．言い換えると A が meager とは A の補集合が，ある稠密開集合の可算共通部分を覆っていることである．

位相の話の復習

位相空間 X の部分集合 A が **meager** であるとは，A が内部が空な閉集合の可算個の和集合で覆うことができることを言う．言い換えると A が meager とは A の補集合が，ある稠密開集合の可算共通部分を覆っていることである．ポーランド空間 X においては，全体集合 X は meager ではない (Baire の範疇定理)．

位相の話の復習

位相空間 X の部分集合 A が **meager** であるとは，A が内部が空な閉集合の可算個の和集合で覆うことができることを言う．言い換えると A が meager とは A の補集合が，ある稠密開集合の可算共通部分を覆っていることである．ポーランド空間 X においては，全体集合 X は meager ではない (Baire の範疇定理)．

性質

1. meager な集合の可算個の和集合は meager である．

位相の話の復習

位相空間 X の部分集合 A が **meager** であるとは，A が内部が空な閉集合の可算個の和集合で覆うことができることを言う．言い換えると A が meager とは A の補集合が，ある稠密開集合の可算共通部分を覆っていることである．ポーランド空間 X においては，全体集合 X は meager ではない (Baire の範疇定理)．

性質

1. meager な集合の可算個の和集合は meager である．
2. 一点集合は meager である．

位相の話の復習

位相空間 X の部分集合 A が **meager** であるとは，A が内部が空な閉集合の可算個の和集合で覆うことができることを言う．言い換えると A が meager とは A の補集合が，ある稠密開集合の可算共通部分を覆っていることである．ポーランド空間 X においては，全体集合 X は meager ではない (Baire の範疇定理)．

性質

1. meager な集合の可算個の和集合は meager である．
2. 一点集合は meager である．
3. どんな meager 集合も meager F_σ な集合に覆われる (F_σ 集合とは閉集合の可算和で書ける集合のこと)．

解析集合は Miller の原理の反例にならない

Perfect set theorem と Tietze の拡張定理を使うと，解析集合は Miller の原理の反例にならないことが分かる．なぜなら，$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ解析集合とし，$K \subseteq S$ をカントール空間と同相な部分空間とする．カントール空間 $\mathfrak{C}$ から $[0,1]$ へ連続全射はある：

$$f\colon \mathfrak{C} \to [0,1]; f(x) = \sum_{n\in\omega} \frac{x(n)}{2^{n+1}}.$$

よって，K から $[0,1]$ へ連続全射はあり，それの定義域を Tietze の拡張定理で延ばすとよい．

CH を仮定すると，Miller の原理の否定が成り立つ

証明の流れ：

1. CH を仮定しているから，連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．
2. Lusin 集合は強零集合．
3. 強零集合は連続像をとっても，強零集合．
4. 強零集合は通常の Lebesgue 測度 0 を持ち，閉区間 $[0, 1]$ は Lebesgue 測度 0 でないのでこれで示せた．

CH より，連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．

定義 1

$A \subseteq \mathbb{R}$ が **Lusin 集合**とは，どんな meager 集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ をとっても $A \cap B$ が高々可算集合であること．

CH より，連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．

定義 1

$A \subseteq \mathbb{R}$ が **Lusin 集合**とは，どんな meager 集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ をとっても $A \cap B$ が高々可算集合であること．

命題 1

CH を仮定する．このとき連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．

CH より，連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．

定義 1

$A \subseteq \mathbb{R}$ が **Lusin 集合**とは，どんな meager 集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ をとっても $A \cap B$ が高々可算集合であること．

命題 1

CH を仮定する．このとき連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．

証明．meager かつ F_σ な $\mathbb{R}$ の部分集合を枚挙して $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とする．実数列 $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を帰納的に

$$x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\} \right)$$

となるよう定める．差集合の右側は meager 集合なのでこの構成はうまくいく．ここで

$$A = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

とおくと，どんな meager 集合 B についても $B \subseteq B_\alpha$ なる α がとれるが，このとき

$$A \cap B \subseteq A \cap B_\alpha \subseteq \{x_i : i \leq \alpha\}$$

となるので良い． □

Lusin 集合は強零集合

定義 2

$A \subseteq \mathbb{R}$ が強零集合とは，どんな正の実数の列 $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ についても，ある区間の列 $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ があって，

1. $\mu(I_n) \leq \varepsilon_n$ (for all $n \in \omega$)
2. $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$

を満たすこととする．

Lusin 集合は強零集合

定義 2

$A \subseteq \mathbb{R}$ が**強零集合**とは，どんな正の実数の列 $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ についても，ある区間の列 $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ があって，

1. $\mu(I_n) \leq \varepsilon_n$ (for all $n \in \omega$)
2. $A \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$

を満たすこととする．

命題 2

Lusin 集合は強零集合．

Lusin 集合は強零集合

定義 2

$A \subseteq \mathbb{R}$ が**強零集合**とは，どんな正の実数の列 $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ についても，ある区間の列 $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ があって，

1. $\mu(I_n) \leq \varepsilon_n$ (for all $n \in \omega$)
2. $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$

を満たすこととする．

命題 2

Lusin 集合は強零集合．

証明．X を Lusin 集合として，$\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ を正の実数の列とする．$\langle q_n : n \in \omega \rangle$ を有理数全体の枚挙とする．

$\bigcup_{n\in\omega}(q_n - \varepsilon_{2n}, q_n + \varepsilon_{2n})$ は稠密開集合なので，特に comeager 集合である．よって Lusin 集合の定義より

$$X \setminus \bigcup_{n\in\omega}(q_n - \varepsilon_{2n}, q_n + \varepsilon_{2n})$$

は可算集合である．それらを $\{x_n : n \in \omega\}$ とする．そうすれば，

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(q_n - \varepsilon_{2n}, q_n + \varepsilon_{2n}) \cup \bigcup_{n\in\omega}(x_n - \varepsilon_{2n+1}, x_n + \varepsilon_{2n+1})$$

となるので X は強零集合である． □

強零集合であることは連続像で保たれる

命題 3

$X \subseteq [0,1]$ を強零集合とする．このときどんな連続関数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$ についても $f[X]$ は強零集合である．

証明．コンパクト集合上の連続関数は一様連続なので，各 $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があり，各 x について $f[(x-\delta, x+\delta)] \subseteq (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ を得る．$\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ を正の実数の列とする．ε_n に対し上の通り δ_n をとる．X が強零集合なので点列 $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ がとれて $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$ となる．すると

$$f[X] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} (f(x_n) - \varepsilon_n, f(x_n) + \varepsilon_n)$$

となりよい．

強零集合はルベーグ零集合である

命題 4

$X \subseteq [0,1]$ を強零集合とする．このとき X のルベーグ測度は 0 である．

証明．任意の $\varepsilon > 0$ について，X のルベーグ外測度 $\mu^*(X)$ が ε 以下なことを示せばよい．それを示すには，強零集合の定義で ε_n を $\varepsilon \cdot 2^{-n}$ とおけば済む．

CH を仮定すると，Miller の原理の否定が成り立つ

これで CH から Miller の原理の否定が導けた．もう一度流れを再掲する：

1. CH を仮定しているから，連続体濃度を持つ Lusin 集合が存在する．
2. Lusin 集合は強零集合．
3. 強零集合は連続像をとっても，強零集合．
4. 強零集合は通常の Lebesgue 測度 0 を持ち，閉区間 $[0, 1]$ は Lebesgue 測度 0 でないのでこれで示せた．

CPA について

CPA(The covering property axiom) は Ciesielski と Pawlikowski が考案した公理である．それは Sacks モデルという強制法で得られるモデルで成り立っていることを公理化したものであり，Sacks モデルで成り立っていることの多くをここから導くことができる．

CPA について

CPA(The covering property axiom) は Ciesielski と Pawlikowski が考案した公理である．それは Sacks モデルという強制法で得られるモデルで成り立っていることを公理化したものであり，Sacks モデルで成り立っていることの多くをここから導くことができる．

この公理の偉いところは強制法の議論を知らなくても，それをブラックボックスとして使って ZFC 無矛盾な結果を出すことの手助けをしてくれることだろう．

CPA について

CPA から出てくる命題の例

1. Miller の原理: $S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき連続関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．
2. ほとんどの「基数不変量」の値が $\aleph_1$ になる．
3. Martin の公理の完全な不成立．
4. 平面 $\mathbb{R}^2$ は連続体濃度未満個の集合で被覆され，その各々のピースは微分可能関数 (微分係数無限大を許す) のグラフであり水平軸または垂直軸のどちらかに沿ったものである．

Naive-CPA

定義

1. ポーランド空間 X に対して，$\mathrm{Perf}(X)$ を X の部分集合で $\mathfrak{C}$ と同相なもの全体を集めた集合とし，この集合に通常の包含関係 $\subseteq$ で順序関係を入れる．

Naive-CPA

定義

1. ポーランド空間 X に対して，$\mathrm{Perf}(X)$ を X の部分集合で $\mathfrak{C}$ と同相なもの全体を集めた集合とし，この集合に通常の包含関係 $\subseteq$ で順序関係を入れる．

定義 (Naive-CPA)

Naive-CPA を次の主張とする：X をポーランド空間とする．
$\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Perf}(X)$ を稠密な部分集合とする．(すなわち任意の
$A \in \mathrm{Perf}(X)$ について $B \in \mathcal{E}$ があって，$B \subseteq A$ とする)．このとき
$(\exists \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E})(|\mathcal{E}_0| < \mathfrak{c}$ かつ $|X \setminus \bigcup \mathcal{E}_0| < \mathfrak{c})$ である．

残念なお知らせ：
ZFC と Naive-CPA は矛盾
する！

定義

$C \subseteq \mathfrak{C}^\omega$ が **perfect cube** であるとは，$C = \prod_{n<\omega} C_n$ であり，各々の C_n は $\mathrm{Perf}(\mathfrak{C})$ の元であること．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$

定義

$C \subseteq \mathfrak{C}^{\omega}$ が **perfect cube** であるとは，$C = \prod_{n<\omega} C_n$ であり，各々の C_n は $\mathrm{Perf}(\mathfrak{C})$ の元であること．

定義

ある perfect cube C から X への単射連続写像を **cube** in X という．cube in X の全体の集合を $\mathcal{F}_{\mathrm{cube}}$ と書き，写像の延長関係で順序を入れる．

定義

$C \subseteq \mathfrak{C}^\omega$ が **perfect cube** であるとは，$C = \prod_{n<\omega} C_n$ であり，各々の C_n は $\mathrm{Perf}(\mathfrak{C})$ の元であること．

定義

ある perfect cube C から X への単射連続写像を **cube** in X という．cube in X の全体の集合を $\mathcal{F}_{\mathrm{cube}}$ と書き，写像の延長関係で順序を入れる．

定義

$\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Perf}(X)$ が $\mathcal{F}_{\mathrm{cube}}$-**稠密**であるとは

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}})(\exists g \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}})(g \text{ は } f \text{ の制限であり } \mathrm{ran}(g) \in \mathcal{E})$$

定義

$$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}} \iff \mathfrak{c} = \omega_2 \text{ かつ どんなポーランド空間 } X \text{ についても}$$
$$(\forall \mathcal{E} \subseteq \mathsf{Perf}(X) \text{ で } \mathcal{F}_{\mathrm{cube}}\text{-稠密なもの})$$
$$(\exists \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E})(|\mathcal{E}_0| \leq \omega_1 \text{ かつ } |X \setminus \bigcup \mathcal{E}_0| \leq \omega_1)$$

$\mathcal{F}_{\mathrm{cube}}$-稠密の同値な定義

補題

$\mathcal{E} \subseteq \mathsf{Perf}(X)$ について次は同値：

1. $\mathcal{E}$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{cube}}$-稠密である．すなわち
$(\forall f \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}})(\exists g \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}})(g$ は f の制限であり $\mathrm{ran}(g) \in \mathcal{E})$.
2.

$$(\forall f \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}} \text{ with } \operatorname{dom} f = \mathfrak{C}^{\omega})(\exists g \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}})$$
$$(g \text{ は } f \text{ の制限であり } \mathrm{ran}(g) \in \mathcal{E})$$

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ を少し弱める：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}} \Rightarrow & (\forall \mathcal{E} \subseteq \mathsf{Perf}(\mathbb{R}) \text{ で } \mathcal{F}_{\mathrm{cube}}\text{-稠密なもの}) \\
& \qquad (\exists \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E})(|\mathcal{E}_0| < \mathfrak{c} \text{ かつ } |X \setminus \bigcup \mathcal{E}_0| < \mathfrak{c}) \\
\Rightarrow & (\forall \mathcal{E} \subseteq \mathsf{Perf}(\mathbb{R}) \text{ で } \mathcal{F}_{\mathrm{cube}}\text{-稠密なもの})(|X \setminus \bigcup \mathcal{E}| < \mathfrak{c}) \\
\Rightarrow & (\forall S \subseteq \mathbb{R} \text{ of size } \mathfrak{c})(\forall \mathcal{E} \subseteq \mathsf{Perf}(\mathbb{R}) \text{ で } \mathcal{F}_{\mathrm{cube}}\text{-稠密なもの}) \\
& \qquad (S \cap \bigcup \mathcal{E} \neq \varnothing) \\
\Rightarrow & (\forall S \subseteq \mathbb{R} \text{ of size } \mathfrak{c})(\forall \mathcal{E} \subseteq \mathsf{Perf}(\mathbb{R})) \\
& \qquad (S \cap \bigcup \mathcal{E} = \varnothing \Rightarrow \mathcal{E} \text{ は } \mathcal{F}_{\mathrm{cube}}\text{-稠密でない})
\end{aligned}
$$

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

ここで $\mathcal{E} = \{P \in \mathrm{Perf}(\mathbb{R}) : S \cap P = \varnothing\}$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}} \Rightarrow & (\forall S \subseteq \mathbb{R} \text{ of size } \mathfrak{c}) \\ & \qquad (\{P \in \mathrm{Perf}(\mathbb{R}) : S \cap P = \varnothing\} \text{ は } \mathcal{F}_{\mathrm{cube}}\text{-稠密でない})\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}} \Rightarrow & (\forall S \subseteq \mathbb{R} \text{ of size } \mathfrak{c}) \\ & \qquad (\exists f \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}} \text{ with } \mathrm{dom}(f) = \mathfrak{C}^\omega) \\ & \qquad\qquad (\forall g \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}})(g \subseteq f \Rightarrow S \cap \mathrm{ran}(g) \neq \varnothing) \\ \Rightarrow & (\forall S \subseteq \mathbb{R} \text{ of size } \mathfrak{c}) \\ & \qquad (\exists f \in \mathcal{F}_{\mathrm{cube}} \text{ with } \mathrm{dom}(f) = \mathfrak{C}^\omega) \\ & \qquad\qquad (\forall P \text{ perfect cube})(S \cap f[P] \neq \varnothing)\end{aligned}$$

この弱い形を使って Miller の原理を導く．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

$S \subseteq \mathbb{R}$ でサイズ連続体濃度のものを任意にとる．このときさっきの $\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ の弱い形より，$f\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathbb{R}$ 連続単射があって，どんな perfect cube P についても $S \cap f[P] \neq \varnothing$ となる．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

$S \subseteq \mathbb{R}$ でサイズ連続体濃度のものを任意にとる．このときさっきの $\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ の弱い形より，$f \colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathbb{R}$ 連続単射があって，どんな perfect cube P についても $S \cap f[P] \neq \varnothing$ となる．
関数 $g \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を連続かつ各点 $y \in \mathfrak{C}$ のファイバー $g^{-1}\{y\}$ が $\mathfrak{C}$ と同相なものを固定．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

$S \subseteq \mathbb{R}$ でサイズ連続体濃度のものを任意にとる．このときさっきの $\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ の弱い形より，$f\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathbb{R}$ 連続単射があって，どんな perfect cube P についても $S \cap f[P] \neq \varnothing$ となる．
関数 $g\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を連続かつ各点 $y \in \mathfrak{C}$ のファイバー $g^{-1}\{y\}$ が $\mathfrak{C}$ と同相なものを固定．
また $\mathrm{proj}_0\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathfrak{C}$ を第 0 座標への射影とする．

$\mathrm{CPA_{cube}}$ から Miller の原理を導く

$S \subseteq \mathbb{R}$ でサイズ連続体濃度のものを任意にとる．このときさっきの $\mathrm{CPA_{cube}}$ の弱い形より，$f\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathbb{R}$ 連続単射があって，どんな perfect cube P についても $S \cap f[P] \neq \varnothing$ となる．
関数 $g\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を連続かつ各点 $y \in \mathfrak{C}$ のファイバー $g^{-1}\{y\}$ が $\mathfrak{C}$ と同相なものを固定．
また $\mathrm{proj}_0\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathfrak{C}$ を第 0 座標への射影とする．
$h_0 = g \circ \mathrm{proj}_0 \circ f^{-1}\colon f[\mathfrak{C}^\omega] \to \mathfrak{C}$ は一様連続である．

$\mathrm{CPA_{cube}}$ から Miller の原理を導く

$S \subseteq \mathbb{R}$ でサイズ連続体濃度のものを任意にとる．このときさっきの $\mathrm{CPA_{cube}}$ の弱い形より，$f \colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathbb{R}$ 連続単射があって，どんな perfect cube P についても $S \cap f[P] \neq \varnothing$ となる．
関数 $g \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を連続かつ各点 $y \in \mathfrak{C}$ のファイバー $g^{-1}\{y\}$ が $\mathfrak{C}$ と同相なものを固定．
また $\mathrm{proj}_0 \colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathfrak{C}$ を第 0 座標への射影とする．
$h_0 = g \circ \mathrm{proj}_0 \circ f^{-1} \colon f[\mathfrak{C}^\omega] \to \mathfrak{C}$ は一様連続である．
$T = S \cap f[\mathfrak{C}^\omega]$ とおくと $h_0[T] = \mathfrak{C}$ である．

$\mathrm{CPA_{cube}}$ から Miller の原理を導く

$S \subseteq \mathbb{R}$ でサイズ連続体濃度のものを任意にとる．このときさっきの $\mathrm{CPA_{cube}}$ の弱い形より，$f\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathbb{R}$ 連続単射があって，どんな perfect cube P についても $S \cap f[P] \neq \varnothing$ となる．
関数 $g\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を連続かつ各点 $y \in \mathfrak{C}$ のファイバー $g^{-1}\{y\}$ が $\mathfrak{C}$ と同相なものを固定．
また $\mathrm{proj}_0\colon \mathfrak{C}^\omega \to \mathfrak{C}$ を第 0 座標への射影とする．
$h_0 = g \circ \mathrm{proj}_0 \circ f^{-1}\colon f[\mathfrak{C}^\omega] \to \mathfrak{C}$ は一様連続である．
$T = S \cap f[\mathfrak{C}^\omega]$ とおくと $h_0[T] = \mathfrak{C}$ である．実際，各点 $y \in \mathfrak{C}$ について

$$
\begin{aligned}
T \cap h_0^{-1}\{y\} &= T \cap f[\mathrm{proj}_0^{-1} \circ g^{-1}\{y\}] \\
&= S \cap f[\mathrm{proj}_0^{-1} \circ g^{-1}\{y\}] \\
&= S \cap f[g^{-1}\{y\} \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \dots] \\
&\neq \varnothing
\end{aligned}
$$

だから．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

これで S の部分集合 T と T から $\mathfrak{c}$ への一様連続全射 h_0 は構成できた．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

これで S の部分集合 T と T から $\mathfrak{c}$ への一様連続全射 h_0 は構成できた．あとは定義域を $\mathbb{R}$ に拡大することと値域を $\mathfrak{c}$ でなく $[0,1]$ にすることが必要．

$\mathrm{CPA_{cube}}$ から Miller の原理を導く

これで S の部分集合 T と T から $\mathfrak{C}$ への一様連続全射 h_0 は構成できた．あとは定義域を $\mathbb{R}$ に拡大することと値域を $\mathfrak{C}$ でなく $[0,1]$ にすることが必要．
ここで $\mathfrak{C}$ を $[0,1]$ 内の 3 進カントール集合と同一視する．値域を $\mathfrak{C}$ でなく $[0,1]$ にすることは簡単．連続写像 $k\colon [0,1] \to [0,1]$ を $k[\mathfrak{C}] = [0,1]$ なるものでとる．これで $h = k \circ h_0\colon T \to [0,1]$ 一様連続全射ができた．

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

これで S の部分集合 T と T から $\mathfrak{C}$ への一様連続全射 h_0 は構成できた．あとは定義域を $\mathbb{R}$ に拡大することと値域を $\mathfrak{C}$ でなく $[0,1]$ にすることが必要．
ここで $\mathfrak{C}$ を $[0,1]$ 内の 3 進カントール集合と同一視する．値域を $\mathfrak{C}$ でなく $[0,1]$ にすることは簡単．連続写像 $k\colon [0,1] \to [0,1]$ を $k[\mathfrak{C}] = [0,1]$ なるものでとる．これで $h = k \circ h_0\colon T \to [0,1]$ 一様連続全射ができた．
今，次の事実を使えば結論を得る：

事実 (Katětov)

距離空間 X の部分集合 A を定義域に持ち単位閉区間を値域とする一様連続写像は X 全体で定義された一様連続関数に延長できる (A はどんな部分集合でもよい！).

$\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導く

これで S の部分集合 T と T から $\mathfrak{C}$ への一様連続全射 h_0 は構成できた．あとは定義域を $\mathbb{R}$ に拡大することと値域を $\mathfrak{C}$ でなく $[0,1]$ にすることが必要．
ここで $\mathfrak{C}$ を $[0,1]$ 内の 3 進カントール集合と同一視する．値域を $\mathfrak{C}$ でなく $[0,1]$ にすることは簡単．連続写像 $k\colon [0,1] \to [0,1]$ を $k[\mathfrak{C}] = [0,1]$ なるものでとる．これで $h = k \circ h_0\colon T \to [0,1]$ 一様連続全射ができた．
今，次の事実を使えば結論を得る：

事実 (Katětov)

距離空間 X の部分集合 A を定義域に持ち単位閉区間を値域とする一様連続写像は X 全体で定義された一様連続関数に延長できる (A はどんな部分集合でもよい！)．

よって $\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ から Miller の原理を導けた． $\square$

関連する話題：より強い肯定は？

次の原理はどうか？

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき微分可能関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

関連する話題：より強い肯定は？

次の原理はどうか？

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき微分可能関数 $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

これは微分可能関数は Lebesgue 測度 0 集合を Lebesgue 測度 0 集合に写すため、ZFC で否定が証明される。

関連する話題：より強い肯定は？

次の原理はどうか？

$S \subseteq \mathbb{R}$ を連続体濃度を持つ集合とする．このとき微分可能関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ があって $f[S] = [0,1]$ である．

これは微分可能関数は Lebesgue 測度 0 集合を Lebesgue 測度 0 集合に写すため、ZFC で否定が証明される。

疑問：微分係数として $\pm\infty$ も許すとどうなる？

関連する話題：より強い否定

Miller の原理の否定よりより強い

1. 連続体濃度を持つ集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ が存在して，どんな Borel 関数 $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ に対しても $f[S] \neq [0,1]$

も CH から導ける．

関連する話題：より強い否定

Miller の原理の否定よりより強い

1. 連続体濃度を持つ集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ が存在して，どんな Borel 関数 $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ に対しても $f[S] \neq [0,1]$

も CH から導ける．

連続写像の場合の証明のキーは「連続像で閉じている小さい集合のクラス (イデアル) のメンバーでサイズが大きいものが存在しうることを示す」ことだった．

関連する話題：より強い否定

Miller の原理の否定よりより強い

1. 連続体濃度を持つ集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ が存在して，どんな Borel 関数 $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ に対しても $f[S] \neq [0,1]$

も CH から導ける．

連続写像の場合の証明のキーは「連続像で閉じている小さい集合のクラス (イデアル) のメンバーでサイズが大きいものが存在しうることを示す」ことだった．
同じ戦略で「Borel 像で閉じているイデアルとそのメンバーでサイズが大きいものが存在しうることを示す」ことで上の主張も CH から導ける．

関連する話題：より強い否定

Miller の原理の否定よりより強い

1. 連続体濃度を持つ集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ が存在して，どんな Borel 関数 $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ に対しても $f[S] \neq [0,1]$

も CH から導ける．

連続写像の場合の証明のキーは「連続像で閉じている小さい集合のクラス (イデアル) のメンバーでサイズが大きいものが存在しうることを示す」ことだった．
同じ戦略で「Borel 像で閉じているイデアルとそのメンバーでサイズが大きいものが存在しうることを示す」ことで上の主張も CH から導ける．
しかしそのイデアルのメンバーでサイズが大きいものの存在の証明はより難しくなる．[Bre96] を参照．

関連する話題：CPA の他の変種

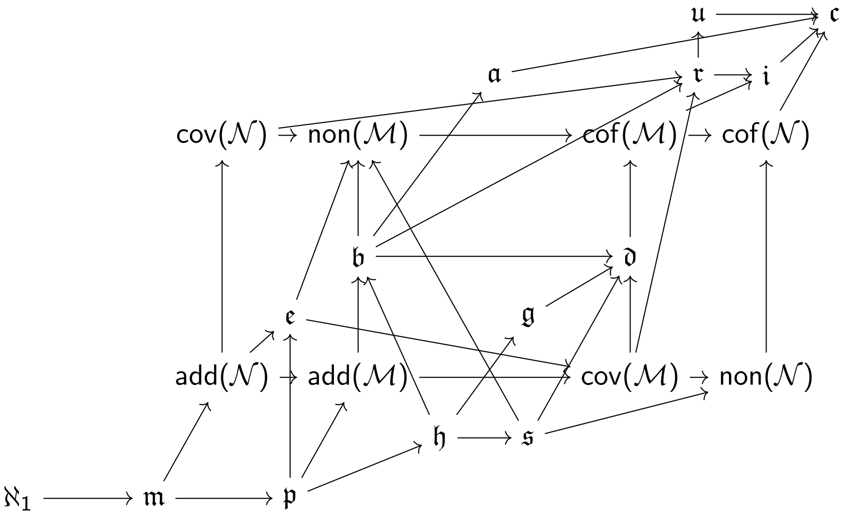
今日扱った $\mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}$ よりより強い公理もあり，それらも Sacks モデルで成り立っている．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CPA} \arrow[r] & \mathrm{CPA}^{\mathrm{game}}_{\mathrm{prism}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CPA}^{\mathrm{game}}_{\mathrm{cube}} \arrow[d] \\
 & \mathrm{CPA}_{\mathrm{prism}} \arrow[r] & \mathrm{CPA}_{\mathrm{cube}}
\end{tikzcd}$$

しかし，これらの公理たちの分離はまだされていない．

関連する話題：基数不変量

CPA の下では以下の $\mathfrak{c}$ 以外がすべて $\aleph_1$ と等しくなる．



未解決問題

1. Miller の原理は連続体濃度が $\aleph_3$ 以上なことと両立するか？

	$\mathfrak{c} = \aleph_1$	$\mathfrak{c} = \aleph_2$	$\mathfrak{c} \geq \aleph_3$
Miller の原理が真	$\times$	◯	？
Miller の原理が偽	◯	◯	◯

参考文献

[Bre96] Jörg Brendle. "Generic constructions of small sets of reals". In: *Topology and its Applications* 71.2 (1996), pp. 125–147.

[CP04] Krzysztof Ciesielski and Janusz Pawlikowski. "The covering property axiom, CPA". In: *Cambridge Tracts in Mathematics* 164 (2004).

[Gol+21] Martin Goldstern et al. "Preservation of splitting families and cardinal characteristics of the continuum". In: *Israel Journal of Mathematics* 246.1 (Dec. 2021), pp. 73–129.

[Mil83] Arnold W Miller. "Mapping a set of reals onto the reals". In: *The Journal of Symbolic Logic* 48.3 (1983), pp. 575–584.

基数不変量の図は [Gol+21] から抜粋した.

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていることの証明の概略を話す．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていることの証明の概略を話す．

今 Sacks モデルとは CH が成り立っているモデル V から出発して Sacks 強制法を ω_2 回 (可算台の) 反復をして得られるジェネリック拡大 $V[G]$ のこととする．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていることの証明の概略を話す．

今 Sacks モデルとは CH が成り立っているモデル V から出発して Sacks 強制法を ω_2 回 (可算台の) 反復をして得られるジェネリック拡大 $V[G]$ のこととする．

Sacks モデル $V[G]$ において $X \subseteq \mathfrak{c}$ で連続体濃度なものが与えられたとする．このとき $f\colon \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$ 連続関数で $f[X] = \mathfrak{c}$ となるものの存在を言いたい．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていることの証明の概略を話す．

今 Sacks モデルとは CH が成り立っているモデル V から出発して Sacks 強制法を ω_2 回 (可算台の) 反復をして得られるジェネリック拡大 $V[G]$ のこととする．

Sacks モデル $V[G]$ において $X \subseteq \mathfrak{c}$ で連続体濃度なものが与えられたとする．このとき $f\colon \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$ 連続関数で $f[X] = \mathfrak{c}$ となるものの存在を言いたい．

背理法で，そうでないと仮定すると F という $\mathfrak{c}$ から $\mathfrak{c}$ への連続関数全体から $\mathfrak{c}$ への関数がとれて，どんな連続関数 f についても $F(f) \notin f[X]$ となるものがとれる．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

Löwenheim–Skolem ライクな論法を使えば，ある $\beta < \omega_2$ がとれて，$V[G_\beta]$ の元でコードされた連続関数 f については
$F(f) \in V[G_\beta]$ となる．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

Löwenheim–Skolem ライクな論法を使えば，ある $\beta < \omega_2$ がとれて，$V[G_\beta]$ の元でコードされた連続関数 f については $F(f) \in V[G_\beta]$ となる．

$V[G_\beta]$ を改めて V だと思うと V の元でコードされた連続関数 f については $F(f) \in V$ となる．この仮定の元で $X \subseteq V$ を示す．そうすれば $V \cap \mathfrak{C}$ の濃度は $V[G]$ で $\aleph_1$ なので X の濃度が $\mathfrak{c} = \aleph_2$ なことに矛盾する．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

今から V で議論．$\Vdash_{\omega_2} \dot{X} \subseteq V$ を示すために，$p \in \mathbb{S}_{\omega_2}$ と名前 τ をとり $p \Vdash \tau \notin V$ を仮定する．

付録：Sacks モデルで Miller の原理が成り立っていること

今から V で議論．$\Vdash_{\omega_2} \dot{X} \subseteq V$ を示すために，$p \in \mathbb{S}_{\omega_2}$ と名前 τ をとり $p \Vdash \tau \notin V$ を仮定する．

今，次が示せる (証明は略す)：

$q \leq p$ と連続関数 $f\colon 2^\omega \to [q(0)]$ がとれて，$q \Vdash f(\tau) = \dot{s}_0$．ここに $\dot{s}_0$ は最初の Sacks 実数で，$[q(0)]$ は木 $q(0)$ の path 全体．
$g\colon [q(0)] \to \mathfrak{C}$ を $g_0\colon [q(0)] \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ 同相写像と $\mathrm{proj}_0\colon \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 第 1 座標への射影の合成とする．
$h = g \circ f$ とおく．$x = F(h)$ とおく．x は V の元である．
$g^{-1}(x)$ は $[q(0)]$ の完全部分集合なのである Sacks 強制法の条件 $r \leq [q(0)]$ がとれて，$g^{-1}(x) = [r]$ である．
今，条件 $q' \in \mathbb{S}_{\omega_2}$ を $q'(0) = r$ かつ $q'(\alpha) = q(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ とおくと，$q' \Vdash h(\tau) = x = F(h)$ となる．
よって $q' \Vdash \tau \notin X$ (F のとり方より)．
したがって，$\Vdash_{\omega_2} \dot{X} \subseteq V$ が言えた． $\square$