神託連鎖条件強制法：一般論

でぃぐ

2024 年 3 月 20 日

目次

0　イントロダクション **1**

1　神託連鎖条件強制法 **1**

2　タイプの排除定理 **5**

3　神託連鎖条件強制法の反復 **7**

0　イントロダクション

本稿は Shelah が考案した神託連鎖条件強制法 (oracle chain condition forcing) の解説である．基本的に [She17] の内容に沿っているのでオリジナリティはない．神託連鎖条件強制法は可算鎖条件より強い条件を満たす強制法であり，グラウンドモデルのダイヤモンド原理を利用する．モデル理論の言葉での「タイプの排除定理」のようなアイディアを使うことで，反復強制法において「残りのステージで追加されてほしくない実数が追加されない」ことを保証するためにこの概念が使われる．

神託連鎖条件強制法の応用として，「Borel 代数からそれを Lebesgue 測度 0 イデアルで割った代数への標準的な全射準同型は分裂しないことの無矛盾性」「$\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$ が非自明な自己同型を持たないことの無矛盾性」がある．これらの応用はまた別の文書で紹介するつもりである．

1　神託連鎖条件強制法

定義 1.1. $\bar{M}$ が **$\aleph_1$-神託**であるとは次を満たすことである:

(1) $\bar{M}$ は列 $\bar{M} = \langle M_\delta : \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} \rangle$ である．
(2) 各 M_δ は ZFC^- の可算推移的モデルである．
(3) 各 $\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ について $\delta + 1 \subseteq M_\delta$ かつ $M_\delta \models$ “δは可算”．
(4) 任意の $A \subseteq \omega_1$ について $\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\}$ は ω_1 の定常集合．

補題 1.2. ダイヤモンド原理 $\diamondsuit$ から $\aleph_1$-神託の存在が導かれる．

証明. ダイヤモンド列 $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ をとる．H_{ω_1} の集合 $(\delta + 1) \cup \{A_\delta\}$ を含む可算初等部分モデル N_δ を取り N_δ の推移崩壊 M_δ とする．このとき $\langle M_\delta : \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} \rangle$ が $\aleph_1$-神託である．□

補題 1.2 の逆も正しいが，本稿では使わない．[Kun83] の Theorem 7.14 を参照せよ．

定義 1.3. 各 $\aleph_1$-神託 $\bar{M}$ に対して，ω_1 上のフィルター $D_{\bar{M}}$ を集合たち

$$I_{\bar{M}}(A) = \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \text{ (for } A \subseteq \omega_1)$$

で生成されるものとする．

補題 1.4. (1) 任意の $A, B \subseteq \omega_1$ について，$C \subseteq \omega_1$ が存在して

$$I_{\bar{M}}(C) = I_{\bar{M}}(A) \cap I_{\bar{M}}(B).$$

(2) $D_{\bar{M}}$ は任意の club 集合であって Lim_{ω_1} に含まれるものを持つ．

(3) $D_{\bar{M}}$ は真の正規フィルター．

証明．(1) $A, B \subseteq \omega_1$ を取る．$g, f \colon \omega_1 \to \omega_1$ を

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 2\alpha \\ f(\alpha) &= 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

で定める．$\delta < \omega_1$ が極限順序数ならば δ は g と f で閉じている．そこで絶対性により $g \restriction \delta, f \restriction \delta \in M_\delta$ である．

$C = g(A) \cup f(B)$ とおく．すると

$$\delta \in I_{\bar{M}}(C) \iff \delta \in I_{\bar{M}}(A) \,\&\, \delta \in I_{\bar{M}}(B)$$

を得る．

(2) $C \subseteq \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ を club 集合とする．$\langle \delta_i : i < \omega_1 \rangle$ を単調増加で連続な C の枚挙とする．$A \subseteq \omega_1$ であって次を満たすものを構成する：$\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ かつすべての $i < \omega_1$ に対して $\delta \neq \delta_i$ ならば，$A \cap \delta \notin M_\delta$．この A を構成し終えると

$$\begin{aligned} I_{\bar{M}}(A) &= \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \\ &\subseteq \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : \delta = \delta_i \text{ for some } i < \omega_1\} \\ &= C \end{aligned}$$

となるので $C \in D_{\bar{M}}$ を得ることになる．

A を区間ごとに帰納的に構成する．つまり $A \cap [\delta_i, \delta_i + \omega)$ を $i < \omega_1$ に関する帰納法で定めていく．これらの区間の外の順序数については必ず A に入れることにする．

$A \cap \delta_i$ が定まったとき，$2^{\aleph_0}$ 個の $A \cap (\delta_i + \omega)$ の可能性がある．その中から一つ選び，可算集合

$$\{B \cap (\delta_i + \omega) : B \in M_\delta, \delta_i < \delta < \delta_{i+1}\}$$

に属さないものとする．この構成で欲しい A が得られる．構成より $\delta \neq \delta_i$ for all $i < \omega_1$ なる $\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ に対して $A \cap \delta \notin M_\delta$ であるからだ．

(3) 真のフィルターであることは (1) と各 $A \subseteq \omega_1$ について $I_{\bar{M}}(A)$ が定常集合である，特に非空であることという事実から従う．

正規性を示そう．対角共通部分で閉じていることを示す．それを示す際，とってくる元たちはフィルターの生成元であるとしてよいので，$I_{\bar{M}}(A_i)$ (各 $i < \omega_1$ について $A_i \subseteq \omega_1$) が与えられることとなる．$A \subseteq \omega_1$ であって

$$I_{\bar{M}}(A) \subseteq \mathop{\triangledown}_{i<\omega_1} I_{\bar{M}}(A_i)$$

となるものを構成すればよい．つまり

$$(\forall \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1})[A \cap \delta \in M_\delta \to (\forall i < \delta)(A_i \cap \delta \in M_\delta)]$$

を言う．(2) と (3) より club many な δ についてこの式が言えれば良い．

$\langle -, - \rangle : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$ を十分良く定義されたペア関数とする．

$$C = \{\delta < \omega_1 : \delta \text{ は } \langle -, - \rangle \text{ で閉じている }\}$$

とおけば C は club である．$\delta \in C$ について $\langle -, - \rangle$ の $\delta \times \delta$ への制限は絶対性より M_δ に属する．

$$A = \{\langle i, \alpha \rangle : \alpha \in A_i \,\&\, i < \omega_1\}$$

とおく．$\delta \in C$ かつ $A \cap \delta \in M_\delta$ を仮定し，$i < \delta$ とする．このとき，$\langle -, - \rangle$ で第一座標が i なものを取り出す関数は絶対的なことから $A_i \cap \delta \in M_\delta$ を得る．これで示せた． □

補題 1.5. $h\colon \mathcal{P}(\omega_1) \to \mathcal{P}(\omega_1)$ を関数とする．このとき $\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(h(A) \cap \delta \in M_\delta)\}$ は $D_{\bar{M}}$ の元である．

証明．集合 $\bigcup_{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$ を $\bigcup_{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta) = \{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ と枚挙する．ただしある club C について，どの $\delta \in C$ に対しても $M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$ の元はすべて δ 未満の番号 α に対する X_α として出現するようにする．このような枚挙は適当なペア関数を使って bookkeeping をすれば可能である．$\alpha < \omega_1$ に対して $Y_\alpha = I_{\bar{M}}(h(X_\alpha))$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}
D_{\bar{M}} \ni C \cap \mathop{\triangledown}_{\alpha < \omega_1} Y_\alpha &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in Y_\alpha)\} \\
&= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in I_{\bar{M}}(h(X_\alpha)))\} \\
&\supseteq \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(\delta \in I_{\bar{M}}(h(A))\} \\
&= \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(h(A) \cap \delta \in M_\delta)\}
\end{aligned}$$

となる．これでよい． □

定義 1.6. $\bar{M}$ を $\aleph_1$-神託とする．強制概念 P が $\bar{M}$ **連鎖条件**を満たすとは，次のいずれかを満たすときである．

(1) $|P| \leq \aleph_0$ である．
(2) $|P| = \aleph_1$ かつある単射 $f\colon P \to \omega_1$ について

$$\begin{aligned}
\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} :& \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば} \\
& f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \in D_{\bar{M}}
\end{aligned}$$

(3) $|P| > \aleph_1$ かつすべての $P^\dagger \subseteq P$ で $|P^\dagger| \leq \aleph_1$ なものについて，P'' であって，$|P''| \leq \aleph_1$ かつ $P^\dagger \subseteq P'' \subseteq P$ であって，P'' は (2) の意味で $\bar{M}$ 連鎖条件を満たし，$P'' \subseteq_{\mathrm{ic}} P$ である．

補題 1.7. 定義 1.6 の (2) における「ある単射 $f\colon P \to \omega_1$ について」は「すべての単射 $f\colon P \to \omega_1$ について」と変更しても同値である．

証明．(2) の証拠となる単射 $f\colon P \to \omega_1$ を取る．単射 $g\colon P \to \omega_1$ を任意に取る．仮定より

$$\begin{aligned}
A := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} :& \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば} \\
& f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\}
\end{aligned}$$

は $D_{\bar{M}}$ の元である．集合

$$B := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : f^{-1}(\{i : i < \delta\}) = g^{-1}(\{i : i < \delta\})\}$$

は club なので B も $D_{\bar{M}}$ の元である．実際，$f \circ g^{-1}$ と $g \circ f^{-1}$ の両方で閉じている点全体の集合が club だからである．集合

$$C := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))((f \circ g^{-1}) \restriction A \in M_\delta)\}$$

も $D_{\bar{M}}$ の元である (by 補題 1.5)．したがって，

$$\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, g^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } g^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば}$$
$$g^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \supseteq A \cap B \cap C \in D_{\bar{M}}$$

となり証明が終わる． □

補題 1.8 (CH)**.** $P_1 \subseteq P_2$ とし，$|P_1| \leq \aleph_1$ かつ P_2 は可算鎖条件を満たすとする．このとき，P_3 が存在して，$|P_3| \leq \aleph_1$ かつ $P_1 \subseteq P_3 \lessdot P_2$ を満たす．

証明. P_2 の部分集合の単調増加連続な列 $\langle P^{(\alpha)} : \alpha < \omega_1 \rangle$ を次のように定める：まず $P^{(0)} = P_1$ として，極限順序数 α については $P^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$ とおく．後続順序数 $\alpha = \beta + 1$ のときの $P^{(\alpha)}$ は次のように定める．$P^{(\beta)}$ の可算集合 I であって P_2 の中で前稠密ではないものの各々について，その witness $p_I \in P_2$ を取る．$P^{(\alpha)}$ は $P^{(\beta)}$ に p_I たちを追加した集合とする．そして，$P_0^{(\alpha)}$ の元のすべての組について，それらが P_2 で両立するなら，共通拡大をとり，$P_0^{(\alpha)}$ に追加して得られる集合を $P^{(\alpha)}$ とする．

最後に $P_3 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} P^{(\alpha)}$ とおけばこれが求めるべきものである．なお，CH を仮定しているので，各ステップにおいて I の個数は $\aleph_1$ であること，そして P_2 が可算鎖条件を満たすので，保存すべきおのおのの極大反鎖のサイズは可算であることに注意しておく． □

補題 1.9. (1) P_1 と P_2 が同型な強制概念でかつ，P_1 が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすならば，P_2 も $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

(2) ある $\aleph_1$ 神託 $\bar{M}$ について P が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすならば，P は可算鎖条件を満たす．

(3) $P \lessdot Q$ かつ Q が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすならば，P も $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

(4) 定義 1.6 の $|P| > \aleph_1$ の場合において，$P'' \lessdot P$ を要求しても同値な定義となる．

証明. (1) 明らか．

(2) 濃度 $\aleph_1$ の場合だけ示せばほかの場合もすぐ従う．そこで P は台集合 ω_1 としてよい．$\mathcal{J}$ を濃度 $\aleph_1$ の極大反鎖とする．このとき club 集合 $C \subseteq \omega_1$ があって，次を満たす：$\delta \in C$ かつ $q < \delta$ ならば，$p \in \mathcal{J} \cap \delta$ があって p と両立可能である，そして，$p, q < \delta$ が両立可能ならば，共通下界を $P \restriction \delta$ に持つ (そういう元を割り当てる写像をとり，それで閉じている元たちからなる club 集合を取ればよい)．

P が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすので，$\delta \in C \cap I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$ が存在して以下を満たす：$A \in M_\delta$ かつ A が $P \restriction \delta$ の前稠密部分集合ならば，A は P の前稠密部分集合である．

今，$\delta \in I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$ より $\mathcal{J} \cap \delta \in M_\delta$ であり，また $\delta \in C$ より $\mathcal{J} \cap \delta$ は $P \restriction \delta$ の前稠密集合である．したがって，前段落の事柄から，$\mathcal{J} \cap \delta$ は P の前稠密集合である．したがって任意の $p \in \mathcal{J} \setminus \delta$ はある $q \in \mathcal{J} \cap \delta$ と両立可能である．$\mathcal{J} \setminus \delta \neq \varnothing$ が $|\mathcal{J}| = \aleph_1$ により分かる．これは $\mathcal{J}$ が反鎖なことに矛盾．

(3) まず，$|P| = |Q| = \aleph_1$ の場合を示す．一般性を失うことなく，Q の台集合は ω_1 としてよい．$\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ を Q が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすことの証拠を与える $D_{\bar{M}}$ のメンバーの元であるとする．集合 A が $P \restriction \delta$ で前稠密かつ $A \in M_\delta$ だと仮定する．このとき A が P で前稠密であることを示さなくてはならない．$P \lessdot Q$ なので，特に $P \subseteq_{\mathrm{ic}} Q$ である．よって A が Q で前稠密であることを示せば十分である．δ のとり方より A が $Q \restriction \delta$ で前稠密なことを示せばよい．

$q \in Q$ に対して，集合 I_q を

$$I_q = \{r \in P : r \text{ は } q \text{ と両立不能 または } (\forall r^\dagger \leq r)(r^\dagger \in P \to r^\dagger \text{ は } q \text{ と両立可能})\}$$

とおく．I_q は P の稠密集合である．よって P の極大反鎖 $J_q \subseteq I_q$ をとれる．$P \lessdot Q$ より J_q は Q の中でも極大反鎖である．$r_q \in J_q$ であって，$(\forall r^\dagger \leq r_q)(r^\dagger \in P \to r^\dagger$ は q と両立可能$)$ なものをとる．こ

れは取れる．なぜなら取れないとしたらすべての $r \in J_q$ が q と両立不能なことになって，J_q が Q で極大反鎖なことに反するからである．今考えている δ の動く範囲をある club 集合との共通部分の中で考えることにより，δ は次を満たすと仮定できる：任意の $q < \delta$ に対して $r_q < \delta$，かつ $p_1, p_2 \in P \restriction \delta$ が P で両立するなら $P \restriction \delta$ でも両立する，かつ Q に対しても同じことが成り立つ．

A が $Q \restriction \delta$ で前稠密なことを示す．そのために，$q \in Q \restriction \delta$ を取る．$r_q \in P \restriction \delta$ であって A が $P \restriction \delta$ で前稠密なので，$p \in A$ があって，p と r_q は両立する．$r^\dagger \in P \restriction \delta$ を p と r_q の共通拡大とする．r_q のとり方より，$r^\dagger$ と q は両立する．よって p と q は両立する．したがって，A は $Q \restriction \delta$ で前稠密であることが示された．これで，$|P| = |Q| = \aleph_1$ の場合が証明された．

次に一般の場合を示そう．P の濃度で場合分けする．

$|P| \leq \aleph_0$ のとき．このときは明らかに P は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

次に $|P| = \aleph_1$ のとき．$|Q| = \aleph_1$ なら証明済みなので $|Q| > \aleph_1$ とする．$|Q|$ が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすことより $P^\dagger \subseteq_{\mathrm{ic}} Q$ であって $P \subseteq P^\dagger$ かつ $P^\dagger$ は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たし，$|P^\dagger| = \aleph_1$ なものが存在する．$P \lessdot Q$ かつ $P^\dagger \subseteq_{\mathrm{ic}} Q$ により，$P \lessdot P^\dagger$ が分かる．よって，すでに示したことより P は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

最後に $|P| > \aleph_1$ のとき．$P^\dagger \subseteq P$ であって $|P^\dagger| = \aleph_1$ なものを任意にとる．補題 1.8 より，P'' を見つけることができて，$|P''| = \aleph_1$ かつ $P^\dagger \subseteq P'' \lessdot P$ である．$P \lessdot Q$ なので，$P'' \lessdot Q$ が従う．よって，小さい方の強制概念の濃度が $\aleph_1$ なときの主張が証明済みなことより，P'' は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．ゆえに，P は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

(4) P がもとの意味で $\bar{M}$ 連鎖条件を満たし，$|P| > \aleph_1$ であるとする．$P^\dagger \subseteq P$ で $|P^\dagger| \leq \aleph_1$ なものを任意に取る．補題 1.8 により，P'' であって，$|P''| \leq \aleph_1$ かつ $P^\dagger \subseteq P'' \lessdot P$ なものを取れる．(3) より P'' は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．これで主張が示された．□

2 タイプの排除定理

定理 2.1 ($\diamondsuit_{\aleph_1}$)**.** 各 $i < \omega_1$ について $\psi_i(x)$ を $\mathbf{\Pi}^1_2$ 論理式とする．$\bigwedge_{i<\omega_1} \psi_i(x)$ は V にも $V^{\mathbb{C}}$ にも解がないと仮定する．このとき，$\aleph_1$ 神託 $\bar{M}$ が存在して，任意の $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす強制概念 P について $\bigwedge_{i<\omega_1} \psi_i(x)$ は V^P にも解がない．

証明. 自然数 n を，強制法の定理たちが ZFC の Σ_n 文から証明でき，定理の仮定が Σ_n で記述できる程度に十分大きく取る．可算な強制概念 P と実数の良い P 名前 $\dot{x}$ に対して $(M(P, \dot{x}), \in)$ を可算な Σ_n 初等的な V の部分モデルとする．

$$I(P, \dot{x}) = \{A \in M(P, \dot{x}) : A \text{ は } P \text{ の前稠密部分集合}\}$$

とおく．

この状況で次の補題をまず示す．

補題 2.2. $P \subseteq_{\mathrm{ic}} P^\dagger$ かつ任意の $A \in I(P, \dot{x})$ は $P^\dagger$ で前稠密だとする．このとき

$$V^{P^\dagger} \models \neg \bigwedge_{i<\omega_1} \psi_i(\dot{x}[G]).$$

証明. $M(P, \dot{x})$ を簡単のため M と書き，その推移崩壊を N とし，推移崩壊写像を $\pi\colon M \to N$ とする．G を $(V, P^\dagger)$ ジェネリックフィルターとする．

$$\tilde{G} = \{p \in \pi(P) : \pi^{-1}(p) \in G\}$$

とおく．$\tilde{G}$ は $(N, \pi(P))$ ジェネリックフィルターである．

実際，上向き閉はかんたんに示せる．ジェネリック性を示すために，$D \in N, D \subseteq \pi(P)$ 稠密集合を任意に取ろう．このとき $\pi^{-1}(D) \in I(M, \dot{x})$ である．仮定より，$\pi^{-1}(D)$ は $P^\dagger$ で前稠密である．よって，G が $(V, P^\dagger)$ ジェネリックなので $\pi^{-1}(D) \cap G \neq \varnothing$ である．元 $p \in \pi^{-1}(D) \cap G$ を取る．このとき $\pi(p) \in D \subseteq$ かつ $\pi^{-1}(\pi(p)) = p \in G$ である．よって，$\pi(p) \in \pi(P) \cap \tilde{G}$. 下向きに有向なことも示さないといけない．$p, q \in \tilde{G}$ とする．

$$J = \{r \in P : r \perp \pi^{-1}(p) \text{ or } r \perp \pi^{-1}(q) \text{ or } r \leq \pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)\}$$

とおく．$J \in M$ かつ J は P の中で前稠密, よって仮定より $P^\dagger$ の中でも前稠密である．ただし，$J \in M$ であることを確かめるために，M と V の初等性と $P, \pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q) \in M$ と P が可算なので $P \subseteq M$ であることを使った．したがって，G のジェネリック性より $J \cap G \ni r$ がとれる．$\pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q) \in G$ より r について J の定義の前半の 2 つを満たすことはないので，$r \leq \pi^{-1}(p), \pi^{-1}(q)$ である．よって，$\pi(r) \in \tilde{G}$ かつ $\pi(r) \leq p, q$ を得る．

$\dot{x}$ は実数の良い名前だったので,

$$\dot{x} = \bigcup_{m \in \omega} \{\check{m}\} \times A_m$$

で各 A_m は P の反鎖である．$\dot{x} \in M$ より各 $A_m \in M$ を得る．

$$\pi(\dot{x}) = \bigcup_{m \in \omega} \{\check{m}\} \times \pi(A_m)$$

である．ここで

$$\dot{x}[G] = \pi(\dot{x})[\hat{G}]$$

が分かる．実際,

$$\begin{aligned} m \in \dot{x}[G] &\iff G \cap A_m \neq \varnothing \\ &\iff \tilde{G} \cap \pi(A_m) \neq \varnothing \\ &\iff m \in \pi(\dot{x})[\hat{G}] \end{aligned}$$

である．2 つ目の同値変形については，まず上から下は $p \in G \cap A_m$ を取ったとき，P の可算性より $p \in A_m \subseteq P \subseteq M$ なので, $\pi(p) \in \tilde{G}$ が分かる．$\pi(p) \in \pi(A_m)$ は当たり前．よって, $\pi(p) \in \tilde{G} \cap \pi(A_m)$ となる．下から上は順当に示せる．

さて，M は V の Σ_n 初等部分モデルなので，補題の仮定を満たす．つまり

$$M \models \text{“}\mathbb{C} \Vdash (\exists i < \omega_1) \neg \psi_i(\dot{x})\text{”}$$

である．M も P を可算だと思っている (つまり Cohen 強制法だと思っている) こと，そして M と N の間の同型と強制関係の定義より，

$$N[\tilde{G}] \models (\exists i < \omega_1) \neg \psi_i(\pi(\dot{x})[\tilde{G}])$$

を得る．よって，$i \in N \cap \omega_1$ があって，

$$N[\tilde{G}] \models \neg \psi_i(\pi(\dot{x})[\tilde{G}]).$$

2 つの推移的モデル $N[\tilde{G}] \subseteq V[G]$ に対して $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 上向き絶対性を使うと

$$V[G] \models \neg \psi_i(\pi(\dot{x})[\tilde{G}]).$$

を得る．これが得たかったことである． //

さて，定理の証明に戻ろう．

$\diamondsuit_{\aleph_1}$ と閉包の議論により，次のような $\aleph_1$ 神託 $\bar{M} = \langle M_\delta : \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} \rangle$ を得ることができる：P が強制概念である $\delta < \omega_1$ を台集合にするもので，$P, \dot{x} \in M_\delta$ ならば $I(P, \dot{x}) \subseteq M_\delta$ (P と $I(P, \dot{x})$ は可算である)．この $\bar{M}$ が定理の結論を満たすことを示そう．

背理法で，$P^\dagger$ が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たし，$\dot{x}$ が実数の $P^\dagger$ 名前で，$V^{P^\dagger} \models \bigwedge_i \psi_i(x)$ であると仮定しよう．今，$|P^\dagger| = \aleph_1$ だと仮定してよい．なぜなら，$|P^\dagger| \leq \aleph_0$ は定理の仮定よりありえない．$|P^\dagger| \geq \aleph_2$ のとき，補題 1.9 より，P'' が取れて，$\dot{x}$ は P'' 名前，$|P''| = \aleph_1$ かつ $P'' \lessdot P^\dagger$ かつ P'' は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすものが取れる．$P'' \lessdot P^\dagger$ なので，絶対性により $V^{P''} \models \neg\psi_i(\dot{x})$ は $V^{P^\dagger} \models \neg\psi_i(\dot{x})$ を導く．よって，$V^{P''} \models \bigwedge_i \psi_i(\dot{x})$ となる．したがって，背理法の仮定を満たす $P^\dagger$ をサイズ $\aleph_1$ で取り直すことができた．

一般性を失うことなく，$P^\dagger$ の台集合は ω_1 であるとしてよい．$\delta < \omega_1$ であって，$P := P^\dagger \upharpoonright \delta$ が次の条件たちを満たすものを見つけられる．

(1) $\dot{x}$ は P 名前．

(2) $P, \dot{x} \in M_\delta$.

(3) $P \subseteq_{\mathrm{ic}} P^\dagger$.

(4) $A \in M_\delta$ かつ A が P で前稠密ならば A は $P^\dagger$ でも前稠密.

実際，$P^\dagger$ が可算鎖条件を満たすことから，(1) を満たす δ は cobounded many にあり，(2) を満たす δ は $D_{\bar{M}}$ の定義より $D_{\bar{M}}$-many にあり，(3) を満たす δ は club many にある (両立元に関する閉包の議論)．そして (4) を満たす δ も神託連鎖条件の定義より，$D_{\bar{M}}$-many にある．したがって，以上全部を満たす δ がある．

これらの事実と $\bar{M}$ の構成と補題 2.2 より，$V^{P^\dagger} \models \neg \bigwedge_i \psi_i(\dot{x})$ を得る．これは矛盾． □

注意 2.3. 補題 2.2 の証明で推移崩壊を取る必要は本当はないし，もとの本 ([She17]) でも取っていない．筆者が非推移的モデルのジェネリック拡大の議論になれていないため，この形にした．

3 神託連鎖条件強制法の反復

補題 3.1. もし $\bar{M}_i$ (for $i < \omega_1$) が $\aleph_1$ 神託たちであれば，$\aleph_1$ 神託 $\bar{M}$ が存在し，次を満たす．

$$P \text{ が } \bar{M} \text{ 連鎖条件を満たす} \Rightarrow \text{任意の } i < \omega_1 \text{ で } P \text{ が } \bar{M}_i \text{ 連鎖条件を満たす}$$

証明. $\bar{M}_i = \langle M^i_\delta : \delta < \omega_1 \rangle$ としよう．各 δ に対して，M_δ を $\bigcup_{i<\delta} M^i_\delta \subseteq M_\delta$ を満たす ZFC^- の ctm としよう．明らかに $\bar{M} = \langle M_\delta : \delta < \omega_1 \rangle$ は $\aleph_1$ 神託である．補題の最後の主張を示すには，次を示せば十分：

主張： もし，$\bar{M}_1, \bar{M}_2$ が $\aleph_1$ 神託で，$\langle \delta : M^1_\delta \subseteq M^2_\delta \rangle$ が cobounded ならば $\bar{M}_2$ 連鎖条件は $\bar{M}_1$ 連鎖条件を導く．

$\because$) $\delta > \delta_0$ で $M^1_\delta \subseteq M^2_\delta$ が成り立つとする．各 $A \subseteq \omega_1$ について $\delta \in I_{\bar{M}_1}(A)$ かつ $\delta > \delta_0$ は $\delta \in I_{\bar{M}_1}(A)$ を導く．そこで，δ が $\bar{M}_2$ に関して条件を満たし，$\delta > \delta_0$ なのであれば，δ が $\bar{M}_1$ に関して条件を満たすことを言えばよいが，それは $M^1_\delta \subseteq M^2_\delta$ から従う． //

□

補題 3.2. もし，P_i $(i < \alpha)$ が有限台反復の結果であり，各 P_i は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすのであれば，$P := \bigcup_{i<\alpha} P_i$ も $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

証明．場合 I: α が後続．P は $P_{\alpha-1}$ なので，仮定より明らかに P は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

場合 II: $\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_1$．$P^\dagger \subseteq P$, $|P^\dagger| = \aleph_1$ ならば，$\mathrm{cf}(\alpha) > \aleph_1$ なので，ある $i < \alpha$ について $P^\dagger \subseteq P_i$ である．P_i は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすので，$\bar{M}$ 連鎖条件を満たす $P'' \subseteq_{\mathrm{ic}} P_i$ でありサイズが $\aleph_1$ であって，$P^\dagger \subseteq P''$ を満たすものをとれる．よって P は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

場合 III: $\mathrm{cf}(\alpha) = \aleph_1$．このとき $\alpha = \omega_1$ を仮定してもよい．$|P| = \aleph_1$ も仮定してもよい．

実際，$|P| < \aleph_1$ なら補題の結論は明らか．$|P| > \aleph_1$ として，P が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たさないとする．すると $P^\dagger \subseteq P$ であってサイズが $\aleph_1$ であるものが存在し，$P^\dagger \subseteq P'' \subseteq_{\mathrm{ic}} P$, $|P''| = \aleph_1$ は P'' が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たさないを含意する．P は ccc を満たすことに注意する．

N を十分大きい χ に対する $H(\chi)$ の初等部分構造であって，$P^\dagger \subseteq N$ かつ $\langle P_i : i \leq \omega_1 \rangle \in N$ かつ $N^\omega \subseteq N$ かつ $|N| = \aleph_1$ なものとする．$P''_i = P_i \cap N$ とすると $P''_i \lessdot P_i$ であり，$\langle P''_i : i \leq \omega_1 \rangle$ は単調増加連続かつ $P^\dagger \subseteq P''_{\omega_1}$ である．しかし $|P''_{\omega_1}| = \aleph_1$ なので，これは $\bar{M}$ 連鎖条件を満たさない．よって我々の反例をサイズ $\aleph_1$ に縮小できたことになる．

さて，ここから $|P| = \aleph_1$ を仮定する．一般性を失うことなく，$P_i \setminus \bigcup_{j<i} P_j \subseteq \omega_1 \times \{i\}$ と仮定してよい．

$$\begin{aligned} A_i := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} :& \text{集合 } C \text{ が } A \in M_\delta, C \subseteq \delta \times \delta, C \text{ が前稠密 in } P_i \restriction (\delta \times \delta) \text{ を満たすならば} \\ & C \text{ は前稠密 in } P_i\} \end{aligned}$$

とおく．P_i は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすので，$A_i \in D_{\bar{M}}$ である．$P_i \lessdot P$ かつ P_i は ccc なので，関数 $\mathrm{pr}_i \colon P \times \omega \to P_i$ がとれて次を満たす：

$$p \in P_i, q \in P \text{ が } P \text{ の中で両立する} \Leftrightarrow \text{ある } n \text{ について } \mathrm{pr}_i(q,n) \text{ と } p \text{ は } P_i \text{ の中で両立する．}$$

補題 1.9(3) の証明と同様，稠密集合

$$D_q = \{r \in P_i : r \text{ は } q \text{ と両立不能 または } (\forall r^\dagger \leq r)(r^\dagger \in P \to r^\dagger \text{ は } q \text{ と両立可能})\}$$

を考え，極大反鎖 $A_q \subseteq D_q$ をとる．完備埋め込みより，A_q は P でも極大反鎖である．P_i は ccc なので，各 A_q は可算である．

$B_q = A_q \cap \{r \in P_i : (\forall r^\dagger \leq r)(r^\dagger \in P \to r^\dagger \text{ は } q \text{ と両立可能})\}$ とおく．B_q は可算な反鎖であり，空でない．なぜなら，空だとしたら，すべての $r \in A_q$ が q と両立不能となり，P の中で A_q が極大反鎖なことに反するからである．

そこで $\{\mathrm{pr}_i(q,n) : n \in \omega\} = B_q$ となるように関数 pr_i を取る．これが所望の関数である．

実際 $p \in P_i, q \in P, p \parallel_P q$ として，$s \in P$ で $s \leq p, q$ なものをとる．J_q の極大性より $r \in J_q$ がとれて，$s \parallel r$. r はある n によって $\mathrm{pr}_i(q,n)$ と書けて，$r \parallel p$ だからよい．

逆に $r = \mathrm{pr}_i(q,n)$ と p が両立するとすれば，その共通拡大は B_q の定義より q の拡大でもあるので，r と p は両立する．

$$B_i = \{\delta : \mathrm{pr}_i[(\delta \times \delta) \times \omega] \subseteq \delta \times \delta \text{ and } \mathrm{pr}_i \restriction ((\delta \times \delta) \times \omega) \in M_\delta\}$$

とおくと $B_i \in D_{\bar{M}}$ である．

$A = \nabla_i A_i$ かつ $B = \nabla_i B_i$ とおく．$D_{\bar{M}}$ が正規フィルターなので，$A, B, A \cap B \in D_{\bar{M}}$ である．

$\delta \in A \cap B$ とし，$Y \in M_\delta$ が $P \restriction (\delta \times \delta)$ が前稠密だとする．次に注意する：

$$p \in P_i \text{ がある } q \in Y \text{ と両立する} \Leftrightarrow p \text{ はある } r \in \mathrm{pr}_i[Y \times \omega] \text{ と両立する}$$

$i < \delta$ ならば $pr_i[Y \times \omega] \in M_\delta$ であること ($\delta \in B_i$ だから)，そして，$pr_i[Y \times \omega]$ は上記注意より $P \restriction (\delta \times \delta)$ の前稠密集合である．したがって，$\delta \in A_i$ より， $\mathrm{pr}_i[Y \times \omega]$ は P_i で前稠密である．前の

注意をもう一度使うと，Y は P_δ の中で前稠密である ($P_\delta = \bigcup_{i<\delta} P_i$ かつ $P \restriction (\delta \times \delta) \subseteq P_\delta$ を使う)．したがって，$P_\delta \lessdot P$ より Y は P で前稠密である．これで，P が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすことを示せた．

場合 IV: $\mathrm{cf}(\alpha) = \aleph_0$．この場合は場合 III とほぼ同様の議論で対角共通部分を可算共通部分に直せば良い． □

次が本物の後続ケースである：

補題 3.3. $\diamondsuit_{\aleph_1}$ を仮定する．$\bar{M}$ が $\aleph_1$ 信託だとし，P をサイズ $\aleph_1$ で $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす強制概念とする．すると V^P の中の $\aleph_1$ 信託 $\bar{M}^*$ が存在し，$\dot{Q} \in V^P$ が $\bar{M}^*$ 連鎖条件を満たすならば，$(P * \dot{Q}$ は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす$)^V$．

証明．まず $P \Vdash |Q| \leq \aleph_1$ を仮定して良い．

> (V, P) ジェネリックフィルター G を取り，$V[G]$ の中で議論する．$|Q| \leq \aleph_1$ のときには補題が言えているものと仮定し，$|Q| > \aleph_1$ かつ Q が $\bar{M}^*$ 連鎖条件を満たす Q を考える．$(P * \dot{Q}$ は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす$)^V$ を示したい．$R \subseteq P * \dot{Q}$ をサイズ $\aleph_1$ の部分集合とする．$\dot{Q}'$ を R の第 2 成分への射影とする．$P \Vdash |\dot{Q}'| \leq \aleph_1$ かつ $P \Vdash \dot{Q}' \subseteq \dot{Q}$ である．よって，Q が $\bar{M}^*$ 連鎖条件を満たすことから，$\dot{Q}''$ がとれて，P は次を強制する：$|\dot{Q}''| \leq \aleph_1$ かつ $Q' \subseteq Q'' \lessdot Q$ かつ Q'' は $\bar{M}^*$ 連鎖条件を満たす．よってサイズ $\aleph_1$ のときの補題の主張より，$P * Q''$ は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．$R \subseteq P * Q'' \lessdot P * Q$ なので，$P * Q$ は $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

したがって，$\dot{Q}$ を ω_1 上の二項関係の P-名前として扱って良い．また，P も台集合 ω_1 だとしてよい．(V, P) ジェネリックフィルター G を固定し，以降 $V[G]$ で議論する．$\omega_1 \times \omega_1$ は $P * \dot{Q}$ の稠密集合であるから，これをメンバーの集合として使ってよい．$A \subseteq \omega_1 \times \omega_1$ と $G \subseteq P$ に対して，

$$A[G] = \{\alpha < \omega_1 : (\exists p \in G)((p, \alpha) \in A)\}$$

とおく．極限順序数 $\delta < \omega_1$ に対して，M^*_δ を ZFC^- の可算推移的モデルであって，$(\delta+1) \cup M_\delta \cup \{A[G] : A \subseteq \delta \times \delta, A \in M_\delta\} \subseteq M^*_\delta$ を満たすものとする．まず，$\bar{M}^*$ が $\aleph_1$ 信託であることを示そう．これには次の主張を示せば十分である．

<u>主張 A:</u> 任意の $A \in D^{V[G]}_{\bar{M}^*}$ について $B \in D_{\bar{M}}$ があって，$B \subseteq A$．

$\because$) $\dot{A}$ を $D^{V[G]}_{\bar{M}^*}$ の元の名前とする．$\dot{S}$ を ω_1 の部分集合に対する P 名前とし，$\dot{A} = I_{\bar{M}^*}(\dot{S})$ とする．$T = \{(p, \alpha) : p \in P, p \Vdash_P \alpha \in \dot{S}\}$ と定める．明らかに $\dot{S}[G] = T[G]$ である．P は ccc を満たすから，任意の $\alpha < \omega_1$ について $\beta < \omega_1$ が存在して，$T[G] \cap \alpha = T[G \cap \beta] \cap \alpha$ である．したがって，V の中に club $C \subseteq \omega_1$ があって，各 $\delta \in C$ について

$$P \Vdash T[\dot{G}] \cap \delta = T[\dot{G} \cap \delta] \cap \delta$$

を満たす．よって, もし $\delta \in C$ かつ $A := T \cap (\delta \times \delta) \in M_\delta$ ならば, $A[G] = T[G \cap \delta] \cap \delta = T[G] \cap \delta \in M^*_\delta$ となる (M^*_δ の定義と $A \in M_\delta$ より)．よって，$C \cap \{\delta : T \cap (\delta \times \delta) \in M_\delta\} \supseteq \dot{A}_G$. ゆえにこの主張の結論が補題 1.4 からわかる． //

さて，これから ($D_{\bar{M}}$ の意味で) 多くの δ について次を示そう：$A \subseteq \delta \times \delta$, $A \in M_\delta$ かつ A が前稠密 in $(P * \dot{Q}) \restriction (\delta \times \delta)$ と仮定したとき，A は前稠密 in $P * \dot{Q}$ である．δ を絞っていくのは議論と同時に行っていく．

<u>主張 B:</u> G を (V, P) ジェネリックフィルターとすると $A[G] \subseteq \delta$, $A[G] \in M^*_\delta$ かつ $A[G]$ は $\dot{Q}_G \restriction \delta$ で前稠密．

$\because$) $(p, q), (\alpha, \beta) \in P * \dot{Q}$ とする．(p, q) と (α, β) が両立するときに限り，

$$f_{(p,q)}(\alpha, \beta) = \min\{\gamma : \exists s(\gamma, s) \leq (p, q), (\alpha, \beta)\}$$

とおく．δ の範囲を絞ることで次を仮定してもよい：

(1) $p, q < \delta$ ならば $f_{(p,q)}``(\delta \times \delta) \subseteq \delta$.

(2) $q < \delta$ ならば関数 $\delta \in p \mapsto f_{(p,q)} \upharpoonright (\delta \times \delta)$ は M_δ に属する．

$q \in \dot{Q}_G \upharpoonright \delta$ とする．$I_q := \bigcup_{p<\delta} f_{(p,q)}``(A)$ とおく．すると $I_q \subseteq \delta$ かつ $I_q \in M_\delta$ である (上の (2) と $A \in M_\delta$ より)．また I_q は $P \upharpoonright \delta$ で稠密である．なぜなら，$p \in P \upharpoonright \delta$ を任意にとったとき，A が前稠密 in $(P * \dot{Q}) \upharpoonright (\delta \times \delta)$ なので，$(\alpha, \beta) \in A$ が存在して，(p, q) と (α, β) は両立する．よって $f_{(p,q)}$ の定義より s が存在して，$f_{(p,q)}(\alpha, \beta), s) \leq (p, q), (\alpha, \beta)$．よって $f_{(p,q)}(\alpha, \beta) \leq p$ となる．

$r \in I_q$ とする．すると，ある $p < \delta$．$s \in Q$ と $(\alpha, \beta) \in A$ について $(r, s) \leq (p, q), (\alpha, \beta)$．今 $P \Vdash r \leq \alpha$ なので $r \in \alpha \in \dot{G}$，したがって $r \Vdash \beta \in A[\dot{G}]$ である．他方で，$r \Vdash$ “$s \leq \beta$ and $s \leq q$” なので，$r \Vdash (\exists \beta \in A[\dot{G}])(q \parallel \beta)$.

$r \in I_q$ の任意性と I_q が前稠密なことより

$$P \Vdash (\exists \beta \in A[\dot{G}])(q \parallel \beta).$$

$q \in \dot{Q}_G \upharpoonright \delta$ の任意性より，$A[\dot{G}]$ は前稠密 in $Q[G] \upharpoonright \delta$ が結論される． //

<u>主張 C:</u> G を (V, P) ジェネリックフィルターとすると A^G は前稠密 in $\dot{Q}_G$.

$\because$) 強制概念は $\dot{Q}_G$ は $\bar{M}^*$ 連鎖条件を満たすという仮定から従う．なお，$D_{\bar{M}^*}$ のメンバーへの制限は，主張 A より $D_{\bar{M}}$ の元への制限に変更できることに注意せよ． //

<u>主張 D:</u> A は $P * \dot{Q}$ で前稠密.

$\because$) $(p, q) \in P * \dot{Q}$ とする．主張 C より $P \Vdash$ “$A[\dot{G}]$ は前稠密 in $\dot{Q}_G$” である．これを定義にしたがって書き直すと，$r \leq p$ と $(\alpha, \beta) \in A$ と $s \in Q$ が存在して，$r \Vdash$ “$\alpha \in \dot{G}, \beta \leq s$ and $q \leq s$” となる．したがって，$r \leq \alpha$ であり，$(r, s) \leq (p, q), (\alpha, \beta)$ となる． //

これで補題が証明された． □

参考文献

[Kun83] Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction To Independence Proofs.* North-Holland, Amsterdam, 1983.

[She17] Saharon Shelah. *Proper and Improper Forcing.* Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2017.

本稿はその内容をほぼ [She17] の第 4 章におっている．