安定的でないモデルの超冪のギャップの長さについて

でぃぐにゃん
2023 年 12 月 23 日 作成

概要

安定的でないモデル M とその証拠となる論理式 φ および ω 上の任意の非単項超フィルター $\mathcal{U}$ について，超冪 $M^{\mathcal{U}}$ の中の非反射的関係 $<_\varphi$ の (ω,λ)-gap の長さ λ の最小値として $\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ という不変量が定められる．実はこれが M や φ によらず $\mathcal{U}$ だけによって決まる「$\mathcal{U}$ の lower cofinality」$\mathrm{lcf}(\mathcal{U})$ という不変量になることを示す．

本稿について

この文書は Alwe さんの企画された Mathematical Logic Advent Calendar 2023 (`https://adventar.org/calendars/8737`) の 13 日目の記事である (なお，「後出し」である)．この記事は超冪の基本的なこと (Łoś の定理ぐらい) を知っていれば読めると思われる．内容は概要に書いた通り．この記事で扱う定理の意義については最後の節を参照してほしい．

1　定義と主定理の証明

定義 1. L を言語，M を L 構造とする．

(1) L 論理式 $\varphi(x,y)$ と $a,b \in M$ について $a <_\varphi b$ を $M \models \varphi(a,b) \wedge \neg\varphi(b,a)$ のこととする．$<_\varphi$ が推移的でなくてもこの記号を使うことに注意する．

(2) $\varphi(x,y)$ が M **の中で不安定**とは，任意の $n \in \omega$ に対して長さ n の M の元の列 $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ が存在して，$a_i <_\varphi a_j$ が任意の $1 \leqslant i < j \leqslant n$ について成り立つことを言う．このような列を長さ n の φ**-鎖**ということにする．

(3) φ が M の中で不安定でないならば，φ は M の中で**安定**であるという．

(4) M の中ですべての論理式が安定ならば，M は**安定**であるという．M の中のある論理式が不安定ならば，M は**不安定**であるという．

ある構造が安定ならそれと初等同値な構造も安定であることは容易に示せる．よって，完全な理論についてそれが安定かどうかということを語ることができる．

M の中で論理式を使って長さが無限の順序を定義できれば，M は不安定であるので，$(\mathbb{N},<)$ や $(\mathbb{R},+,\cdot)$ は不安定である．非可算範疇的な理論は安定であるので，p (0 または素数) を固定したとき，標数 p の代数閉体の理論は安定である．

以下，安定的でないモデル M とそれを witness する論理式 φ を固定する．

定義 2. $\mathcal{U}$ を ω 上の非単項超フィルターとする．λ を無限基数とする．$M^{\mathcal{U}}$ の中の φ**-**λ**-pregap** とは次を満たす列の組 $(\vec{a},\vec{b})$ のことである：

(1) $\vec{a}, \vec{b}$ はそれぞれ長さ ω, λ の $M^{\mathcal{U}}$ の元の列であり，$\vec{a} = ([a_m]_{\mathcal{U}})_{m<\omega}$, $\vec{b} = ([b_\gamma]_{\mathcal{U}})_{\gamma<\lambda}$.

(2) $\vec{a}$ の成分は単調増大：$[a_m] <_\varphi [a_n]$ for $m < n$.

(3) $\vec{b}$ の成分は単調減少：$[b_\gamma] <_\varphi [b_\delta]$ for $\delta < \gamma < \lambda$.

(4) $\vec{a}$ のどの成分も $\vec{b}$ のどの成分より小さい：$a_m <_\varphi b_\gamma$ for $m < \omega, \gamma < \lambda$.

φ-λ-pregap は次の条件を満たすとき **φ-λ-gap** という：

(5) 次のような $[c]_{\mathcal{U}} \in M^{\mathcal{U}}$ が存在しない：すべての $m < \omega, \gamma < \lambda$ について $[a_m]_{\mathcal{U}} <_\varphi [c]_{\mathcal{U}} <_\varphi [b_\gamma]$.

定義 3. $M^{\mathcal{U}}$ の中の φ-λ-gap が存在するような最小の無限基数 λ を $\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ と書く.

$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ が存在するかどうかは現時点では明らかでない．超冪 $M^{\mathcal{U}}$ は $\aleph_1$ 飽和的なので，φ-$\aleph_0$-gap は存在しない．よって，$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ があるとすれば，$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}}) \geqslant \aleph_1$ である.

次に $\mathcal{U}$ の lower cofinality を定義しよう．そのために次の定義をする.

定義 4. $\mathcal{U}$ を ω 上の非単項超フィルターとする．$f, g \in \omega^\omega$ に対して

$$f <_{\mathcal{U}} g \iff \{n < \omega : f(n) < g(n)\} \in \mathcal{U}$$

という関係を定める．$<_{\mathcal{U}}$ は $\omega^{\mathcal{U}}$ 上の全順序関係を誘導するが，それも同じ記号で $<_{\mathcal{U}}$ と書く.

$f \in \omega^\omega$ が $\mathcal{U}$ **無限**であるとは，各 $m \in \omega$ について

$$\{n \in \omega : f(n) > m\} \in \mathcal{U}$$

となることを言う．$\omega^\omega_{\mathcal{U},\infty}$ で $\mathcal{U}$ 無限な ω^ω の元の集合を表す.

定義 5. $\mathcal{U}$ を ω 上の非単項超フィルターとする．$\mathcal{U}$ の **lower cofinality** とは，$\omega^\omega_{\mathcal{U},\infty}$ の関係 $>_{\mathcal{U}}$ ($<_{\mathcal{U}}$ の逆順序) に関する共終数を意味する.

状況 6. 次のものたちが与えられている状況を考える.

- $\langle Y_m : m \in \omega \rangle$ で各 $Y_m \in \mathcal{U}$ で $Y_0 = \omega$ で各 m で $Y_m \supseteq Y_{m+1}$ かつ $\bigcap_{m\in\omega} Y_m = \varnothing$ なものが与えられている.
- $\Phi \colon \omega \to \omega$ は $\Phi(i) = m$ if $i \in Y_m \setminus Y_{m+1}$ で定義されるもの．この Φ は明らかに $\omega^\omega_{\mathcal{U},\infty}$ の元である.
- 各 i について長さ $\Phi(i) + 1$ の M の元の φ-鎖 $a^i_0, \dots, a^i_{\Phi(i)}$ が与えられている.

定義 7. 状況 6 のもとで，$h \in \omega^\omega$ とする．このとき $a_h \in M^\omega$ を，もし $h(i) \leqslant \Phi(i)$ ならば $h(i) = a^i_{h(i)}$ と定め，そうでないとき $h(i) = a^i_{\Phi(i)}$ と定める.

補題 8. 状況 6 のもとで，$g, h \in \omega^\omega$ を $g, h \leqslant_{\mathcal{U}} \Phi$ かつ $g \neq_{\mathcal{U}} h$ を満たすものとする．このとき $g <_{\mathcal{U}} h$ ならば，$[a_g]_{\mathcal{U}} <_\varphi [a_h]_{\mathcal{U}}$ である.

証明.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\ni \{i \in \omega : g(i) < h(i) \leqslant \Phi(i)\} \\ &\supseteq \{i \in \omega : a_g(i) <_\varphi a_h(i)\} \end{aligned}$$

よりよい. □

自然数 m に対して $\bar{m}$ で m の定数列，すなわち $\langle m, m, m, \dots \rangle$ を表す.

補題 9. 状況 6 のもとで，$[b]_{\mathcal{U}} \in M^{\mathcal{U}}$ は，すべての $m < \omega$ に対して $[a_{\bar{m}}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b]_{\mathcal{U}}$ を満たすとする．このとき次のような $h \in \omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ で $h \leqslant_{\mathcal{U}} \Phi$ なものが存在する：

- $[a_{\bar{m}}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [a_h]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b]_{\mathcal{U}}$.
- 任意の $g \in \omega^{\omega}$ について，もし $g <_{\mathcal{U}} h$ なのであれば，$[a_g] <_{\varphi} [b]$.

証明. 各 $m < \omega$ について

$$X_m = \{i \in Y_m : (\forall k \leqslant m)(a_{\bar{k}}(i) <_{\varphi} b(i))\}$$

とおく．仮定より，X_m $(m < \omega)$ は包含に関して単調減少な $\mathcal{U}$ の元の列であり，$\bigcap_{m\in\omega} X_m = \varnothing$ なことに注意しよう．そこで $i \in X_m \setminus X_{m+1}$ について $h(i) = m$，$i \in \omega \setminus X_0$ について $h(i) = 0$ と定める．

$h(i)$ は「どこの X_{m+1} で初めて弾かれるか」を表す量なので，「どこの Y_{m+1} で初めて弾かれるか」を表す量以下である，すなわち $h \leqslant \Phi$. また，$i \in X_m$ ならば $h(i) \geqslant m$ なので h は $\mathcal{U}$ 無限である．

この h が所望のものなことを示そう．h は無限なので，任意の $m \in \omega$ について $\bar{m} \leqslant_{\mathcal{U}} h$. よって補題 8 より $a_{\bar{m}} <_{\varphi} a_h$ である．

$g \in \omega^{\omega}$ を任意にとり，$g <_{\mathcal{U}} h$ を仮定する．すると

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &\ni \{i \in \omega : i \in X_{g(i)}\}\\ &\supseteq \{i \in \omega : a_g(i) <_{\varphi} b(i)\}\ (X_{g(i)}\text{ の定義と }a_g\text{ の定義})\end{aligned}$$

なので，$[a_g]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b]_{\mathcal{U}}$ を得る． □

定理 10. ω 上の任意の非単項超フィルター $\mathcal{U}$ について $\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ は存在し，$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}}) = \mathrm{lcf}(\mathcal{U})$ である．

証明. $\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ が存在し，$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}}) \leqslant \mathrm{lcf}(\mathcal{U})$ であることをまず示す．$(h_\gamma)_{\gamma<\mathrm{lcf}(\mathcal{U})}$ を $\omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ の $<_{\mathcal{U}}$ 単調減少共終列とする．$Y_m = \{i \in \omega : i \geqslant m\}$ とおく．すると $\Phi(i) = i$ である．i ごとに M の長さ $i+1$ の φ-鎖 $a^i_0, \ldots, a^i_i$ を選び出し固定する．これは M が不安定なので可能である．この $\langle Y_m : m \in \omega\rangle, \Phi, \langle a^i_j\rangle_{i,j}$ により状況 6 にいるものとする．補題 8 より $\vec{a} = ([a_{\bar{m}}]_{\mathcal{U}})_{m<\omega}$ と $\vec{b} = ([b_\gamma]_{\mathcal{U}})_{\gamma<\mathrm{lcf}(\mathcal{U})}$ との組は pregap をなす．これが gap なことを示そう．$[c]_{\mathcal{U}}$ を任意にとり，$[a_m]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [c]_{\mathcal{U}}$ とする．すると補題 9 により $h \in \omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ で $[a_{\bar{m}}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [a_h]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [c]_{\mathcal{U}}$ なものがとれる．共終性より $\gamma < \mathrm{lcf}(\mathcal{U})$ があって，$h_\gamma <_{\mathcal{U}} h$ である．しかし，補題 9 の最後の条件により，$[a_{h_\gamma}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [c]$ が従う．よって，$[c] <_{\varphi} [a_{h_\gamma}]_{\mathcal{U}}$ は成り立たない．これで gap なことが示された．したがって，$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ が存在し，$\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}}) \leqslant \mathrm{lcf}(\mathcal{U})$ であることもわかった．

次に逆向きの不等号 $\mathrm{lcf}(\mathcal{U}) \leqslant \kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ も示そう．$\vec{a} = ([a_m]_{\mathcal{U}})_{m<\omega}$ と $\vec{b} = ([b_\gamma]_{\mathcal{U}})_{\gamma<\lambda}$ が gap をなすとする．このとき

$$Y_m = \{i \in \omega : i \geqslant m\text{ かつ }a_0(i), \ldots, a_m(i)\text{ が }\varphi\text{-鎖 }\}$$

とおく．$a^i_j = a_i(j)$ とおく．この設定は状況 6 を満たす．また，このとき各 $m \in \omega$ について $[a_m]_{\mathcal{U}} = [a_{\bar{m}}]_{\mathcal{U}}$ なことに注意する．

$\gamma < \kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ に関する帰納法で，$\omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ の $<_{\mathcal{U}}$ 減少列を定めていく．$h_0 \in \omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ は $h_0 \leqslant \Phi$ ならなんでもよい．すべての $\delta < \gamma$ で h_δ が定まったとする．すると $\kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ の最小性より，$[b]_{\mathcal{U}} \in M^{\mathcal{U}}$ が存在し，$[a_m]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [a_{h_\delta}]_{\mathcal{U}}$ for $m < \omega, \delta < \gamma$ を満たす．補題 9 より，$g_1 \in \omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ が存在し，$[a_{g_1}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b]_{\mathcal{U}}$ となる．もう一度補題 9 より，$g_2 \in \omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ が存在し，$[a_{g_2}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b_\gamma]_{\mathcal{U}}$ となる．h_γ を $\omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ の元であり，g_1, g_2 より $<_{\mathcal{U}}$ の意味で真に小さくとる．$h_\gamma <_{\mathcal{U}} h_\delta$ がすべての $\delta < \gamma$ で成り立つ．

なぜなら，$[b]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [a_{h_\delta}]_{\mathcal{U}}$ なので，$[a_{h_\delta}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b]_{\mathcal{U}}$ ではない．よって補題 9 の最後の条件の対偶より，$h_\delta <_{\mathcal{U}} g_1$ ではない．つまり $g_1 \leqslant_{\mathcal{U}} h_\delta$. したがって，$h_\gamma <_{\mathcal{U}} g_1 \leqslant_{\mathcal{U}} h_\delta$.

また $[a_{h_\delta}]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b_\gamma]_{\mathcal{U}}$ である ($h_\gamma \leqslant g_2$ と補題 9 の最後の条件より従う).

こうして構成された列 $\langle h_\gamma : \gamma < \kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}}) \rangle$ が共終なことを見よう．ある元 $h \in \omega^{\omega}_{\mathcal{U},\infty}$ がすべての $\gamma < \kappa(\varphi, M^{\mathcal{U}})$ に対して $h <_{\mathcal{U}} h_\gamma$ を満たすと仮定する．それは構成と補題 9 の最後の条件より，すべての γ に対して $[a_h]_{\mathcal{U}} <_{\varphi} [b_\gamma]_{\mathcal{U}}$ であることを含意するが，これは gap であることに反する． □

2　余談

定理 10 の主張だけを見ても，「だから何？」という感想を持つかもしれない．実は，以下も知られている．

定理 11. 任意の $\aleph_1 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$ について，ω 上の任意の非単項超フィルター $\mathcal{U}$ が存在して，$\mathrm{lcf}(\mathcal{U}) = \kappa$ となる．

定理 10 と定理 11 を組み合わせると，「連続体仮説の否定を仮定したときに，不安定なモデルの ω 超冪は超フィルターに依存する．すなわち二つの超フィルター $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ が存在して，モデル M の超冪 $M^{\mathcal{U}}$ と $M^{\mathcal{V}}$ が非同型である」ことが従う．定理 10 はこのような興味深い定理の一ピースなのだと理解できる．もう一つのピースである，定理 11 については，別の記事で解説する予定である．

参考文献

[Gol22] I. Goldbring. *Ultrafilters Throughout Mathematics*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2022.