Ramsey の定理の応用

でぃぐにゃん
2023 年 12 月 5 日 作成

目次

はじめに

この記事は Math Advent Calendar 2023 (`https://adventar.org/calendars/8530`) の 5 日目の記事である．

本記事では有限 Ramsey の定理のモデル理論への応用を述べる．有限 Ramsey の定理とは次の定理であった．

定理 (有限 Ramsey の定理)**.** k, n, c を任意の正の整数とする．このとき十分大きい正の整数 K を選べば次が成立する：任意の $F\colon [K]^n \to c$ に対して，ある $H \in [K]^k$ があって，$F([H]^n)$ は一点集合．

第 1 節では，この定理を使って，識別不能集合を持つモデルを構成する．第 2 節では，識別不能集合の応用として，非可算範疇性を持つ理論は ω 安定ということを示す．第 3 節では安定性を分かりやすい条件により特徴づける．第 4 節では，ここまでの応用としてランダムグラフの理論が非可算範疇的でないことを示す．

コンパクト性定理ぐらいまでの一階述語論理の知識は仮定する．

本稿は未完成であり，第 1 節しかまだ書けていない．今後の更新に乞うご期待！

1　識別不能集合を持つモデルの構成

この節では，有限 Ramsey の定理を使って，識別不能集合を持つモデルを構成する．

定義 1. Γ を言語 L の論理式の集合とする．L 構造 M と $I \subseteq |M|$ とその上の線形順序 $<$ について，**$(I, <)$ が M の Γ 識別不能集合**であるとは，どんな $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ と I の中の 2 つの上昇列 $i_1 < \cdots < i_n$ と $j_1 < \cdots < j_n$ についても

$$M \models \varphi(i_1, \ldots, i_n) \leftrightarrow \varphi(j_1, \ldots, j_n)$$

となることを言う．Γ が L 論理式全体の集合なら，単に $(I, <)$ が M の識別不能集合であるという．

例 2. $(\omega, 0, S)$ の中にサイズ 2 以上の識別不能集合は存在しない．なぜなら，n と m という二つの異

なる元は n は 0 に S を n 回適用したもの，m は 0 に S を m 回適用したものとして論理式で「識別できる」からである．

他方で，$(\mathbb{Q},<)$ において $(\mathbb{Q},<)$ それ自身は識別不能集合である．

補題 3. M を言語 L の無限構造，$<$ を $|M|$ 上の線形順序とする．$k \in \omega$ とする．Γ を L 論理式の有限集合とする．このとき，ある自然数 K が存在し，$|M|$ のサイズ K 以上の任意の有限部分集合 A に対して，A の元の上昇列 $a_1 < \cdots < a_k$ が存在し，$(\{a_1,\ldots,a_k\},<)$ は Γ 識別不能集合となる．

証明．$\Gamma = \{\varphi_i(x_1,\ldots,x_n) : i < m\}$ としよう (Γ は有限集合なので自由変数の個数は揃っているとしてよい)．$P\colon [|M|]^n \to 2^m$ を

$$P(b_1,\ldots,b_l) = \{i < m : M \models \varphi_i(b_1,\ldots,b_n))\}$$

と定める．有限 Ramsey の定理より，ある $K \in \omega$ があって，任意の $A \in [|M|]^K$ に対して，ある $H \in [A]^k$ があって，$P([H]^n)$ は一点集合となる．

Ramsey の定理の F として $F = P \restriction [A]^n$ を使うのである．

このとき $H = \{a_1,\ldots,a_k\}$ で $a_1 < \cdots < a_k$ とすれば，$P([H]^n)$ は一点集合なことより，H は Γ 識別不能集合である． □

定理 4. $(I,<)$ を線形順序集合，T を無限モデルをもつ L 理論とする．このとき，T のモデル M で，$I \subseteq M$ であり，$(I,<)$ が M の中で識別不能集合となるものがある．

証明．$C = \{c_i : i \in I\}$ を新しい定数記号の集合とする．$L_I = L \cup C$ とおく．言語 L_I 上の理論 T_I は次のすべてから構成されるとする：

(1) T に属する各論理式
(2) I の互いに異なる 2 元 i,j に対して $c_i \neq c_j$
(3) L 論理式 $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ と I の元の 2 つの上昇列 $i_1 < \cdots < i_l$ と $j_1 < \cdots < j_l$ に対して，$\varphi(c_{i_1},\ldots,c_{i_l}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_1},\ldots,c_{j_l})$

T_I がモデルを持つことを示せば証明は終わる．そこでコンパクト性定理より T_I の各有限部分がモデルを持つことを示す．

T の無限モデル M をとり，M 上の線形順序を一つ取り，$<$ とする．$T_0 \subseteq T_I$ を有限部分集合とする．T_0 に現れる C の元は n 個であるとし，$c_{h_1},\ldots,c_{h_n}$ と昇順に並べる．T_0 の中で (3) の形の論理式の中の φ には $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ が使われているとする．前補題 3 より，M の元 $a_1 < \cdots < a_n$ を見つけることができて，それは M の中で $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$ 識別不能集合である．よって，構造 M に新たに $c_{h_1},\ldots,c_{h_n}$ の解釈を $a_1,\ldots,a_n$ と与えることで，T_0 のモデルが得られる． □

2 非可算範疇性を持つ理論は ω 安定

3 安定性の特徴づけ

4　応用：ランダムグラフは非可算範疇的でない

参考文献

[Hod93] W. Hodges. *Model Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[新井 21] 新井 敏康. **数学基礎論**. 東京大学出版会, 2021.