L における補解析的 MAD 族

でぃぐにゃん
2023 年 12 月 20 日 作成

概要

本稿は Miller によるコーディングの議論を使って，$V = L$ のもとで補解析的 (すなわち Π^1_1 な) MAD 族 (maximal almost disjoint family) が存在することを示す.

目次

本稿について

この文書は Alwe さんの企画された Mathematical Logic Advent Calendar 2023 (`https://adventar.org/calendars/8737`) の 20 日目の記事である.

本稿では前提知識として構成可能性宇宙の基礎を仮定する ($V = L$ が GCH を導くことの証明まで知っていれば十分である).

Miller [Mil89] によるコーディングの議論を使って，$V = L$ のもとで補解析的 (すなわち Π^1_1 な) MAD 族 (maximal almost disjoint family) が存在することを示す.

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ な MAD 族がないことは Mathias [Mat77] により証明されているので，Miller の定理は MAD 族が射影階層のどのレベルで取れうるかということの解を与えているといえる.

同じ論法を使って，$V = L$ のもとで様々な組み合わせ的対象が Π^1_1 で取れることが証明されている：「平面 $\mathbb{R}^2$ 上で任意の直線とちょうど 2 回交わる集合」「タワー」([FS18] を参照)「極大独立集合」「Hamel 基底」などなど.

1 L についての復習

事実 1. [Kun11, Lemma II.6.16] 推移的集合 M が $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P} + (V = L)$ を満たすならば，$M = L_\alpha$ がある α について成り立つ.

事実 2. [Kun11, Lemma II.6.22] κ が非可算正則基数ならば，L_κ は $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P} + (V = L)$ を満たす．特に，L_{ω_1} は $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P} + (V = L)$ を満たす.

今後，Th は公理 $V = L$ および関数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ が絶対的となるのに十分なだけの有限個の ZFC の公理を集めた集合とする.

2 point definability

$\alpha < \omega_1$ について，$(L_\alpha, \in)$ が point definable であるとは，$\mathrm{SkHull}^{(L_\alpha,\in)}(\varnothing)$ が $(\alpha, \in)$ と同型なときを言う．ここで，$\mathrm{SkHull}^{(L_\alpha,\in)}(\varnothing)$ は $\varnothing$ の構造 $(L_\alpha, \in)$ の中の Skolem 閉包であり，Skolem 項は L の順序で最小のものとして解釈する．

補題 3. $(L_\alpha, \in)$ が point definable となる $\alpha < \omega_1$ は ω_1 の中に非有界に存在する．

証明．$\delta_0 < \omega_1$ を任意に取る．$\delta \in [\delta_0, \omega_1)$ を $(L_\delta, \in) \prec (L_{\omega_1}, \in)$ となる順序数としてとる．L_{ω_1} ではすべての順序数が可算なので，ある全射 $f \colon \omega \to \delta$ が L_{ω_1} の中に存在する．そのような f が初めて登場するステージを $L_{\beta+k}$ ($\beta > \delta$, $k \in \omega \setminus \{0\}$) とする．$\alpha = \beta + \omega$ とおく．L_α の中で β は最大の極限順序数として定義可能である．また，L_β の中で δ は最小の非可算順序数として定義可能である．

> δ が L_β の中で非可算なのは，$L_{\beta+k}$ で初めて上のような f が登場するからである．$\gamma < \delta$ を任意に取る．L_δ は $(L_{\omega_1}, \in)$ の初等部分構造なので，すべての順序数が可算である．特に $L_\delta \models$ “γ は可算”．γ は可算という命題は上向き絶対的なので，L_β の中でも γ は可算である．

したがって，L_α の中で δ は定義可能となる．$M = \mathrm{SkHull}^{(L_\alpha,\in)}(\varnothing)$ とおく．すると，$\delta \in M$ かつ M の中に ω から δ への全射 g がある．よって，$\delta = f[\omega] \subseteq M$ となる．L_λ を M の Mostowski 崩壊とし，$\pi \colon M \to L_\lambda$ を崩壊写像とする．M の Mostowski 崩壊が L_λ の形になるのは，M が $\mathsf{ZFC}-\mathsf{P}+(V = L)$ を満たすことによる．$\delta \subseteq M$ より，$\pi(\delta) = \delta$. 加えて，$M \models$ “δ は可算” なので，$L_\lambda \models$ “δ は可算” となる．よって，α の最小性より，$\alpha \leqslant \lambda$ となる．また，$L_\lambda \subseteq L_\alpha$ なので，$\lambda \leqslant \alpha$ となる．したがって，$\lambda = \alpha$ なので，$M \simeq (L_\alpha, \in)$ となり，α は point-definable である． □

補題 4. $(L_\alpha, \in)$ が point definable であるならば，ある関係 $E \subseteq \omega \times \omega$ であって，$(\omega, E) \simeq (L_\alpha, \in)$ となるものが，recursive in $\mathrm{Th}(L_\alpha, \in)$ で見つかる．ここに $\mathrm{Th}(L_\alpha, \in)$ は L_α の理論である．

証明．言語 $\mathcal{L}_\in$ の Skolem 項を $\{t_n : n \in \omega\}$ と並べる．仮定より，$L_\alpha = \{t_n^{(L_\alpha,\in)} : n \in \omega\}$ である．$m \mathrel{E} n \iff$ “$t_m \in t_n$” $\in \mathrm{Th}(L_\alpha, \in)$ と定めればよい． □

$\mathrm{Th}(L_\alpha, \in)$ は $L_{\alpha+2}$ に属するので，上記の E は $L_{\alpha+3}$ に属する．

3 補解析的 MAD 族

補題 5. $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ を ω の無限集合への分割であって，この族自体が recursive なものとする．$P \subseteq [\omega]^\omega$ を $\{A_n : n \in \omega\}$ を含む almost disjoint な可算な族とする．$z \in 2^\omega$ を任意の元とし，u を $[\omega]^\omega$ の元で P のすべての元と almost disjoint なものとする．このとき $x \in [\omega]^\omega$ であって，$z \leqslant_{\mathrm{T}} x$ であって，x は P のすべての元と almost disjoint であり，$u \subseteq x$ を満たす．しかも，そのような x が以上で与えられたデータから計算可能に見つかる．

証明．$\{B_n : n \in \omega\} = P \setminus \{A_n : n \in \omega\}$ とする．$z \leqslant_{\mathrm{T}} x$ を満たすようにするため，

$$z(n) = 0 \implies x \cap A_n \text{ は偶数個の元からなる}$$
$$z(n) = 1 \implies x \cap A_n \text{ は奇数個の元からなる}$$

となるように x を作る．$x = u \cup \bigcup_{n\in\omega} F_n$ であって，各 F_n は A_n の部分集合でサイズ 0 または 1 となるようにする．また，F_n は $B_0, B_1, \ldots, B_n$ と disjoint なようにとる．

F_n に入れる元として，$A_n \setminus (B_0 \cup \cdots \cup B_n)$ の (自然数の順序で) 最小の元を取れば，x は与えられ

たデータから計算可能に取れる． □

補題 6. $\alpha < \omega_1$ とし，$\langle A_n : n \in \omega \rangle \in L_\alpha$ が almost disjoint な自然数の無限集合の族ならば，$L_{\alpha+1}$ の中に，A_n すべてと almost disjoint な無限集合 B が取れる．

証明. m_n $(n \in \omega)$ を次のように再帰的に定める：m_n は $m_0, \dots, m_{n-1}$ のすべてより大きく，$m_n \notin A_0 \cup \dots \cup A_i$ となるような最小の自然数．そして，$B = \{m_n : n \in \omega\}$ とおく．

この B が $L_{\alpha+1}$ に属することを示そう．

$$\begin{aligned} B = \{m \in \omega :& (\exists \langle m_0, \dots, m_k \rangle) \\ & [m = m_k \text{ かつ各 } i \leqslant k \text{ について } m_i \text{ は次を満たす最小の自然数:} \\ & m_0, \dots, m_{i-1} < m_i \text{かつ各 } j \leqslant i \text{ について } m_i \notin A_j]\} \end{aligned}$$

であって，この B の定義の条件は $L_\alpha \models$ をつけても問題ない．よって，$L_{\alpha+1}$ の定義より，$B \in L_{\alpha+1}$ である．

□

定理 7. $V = L$ のもとで (lightface) Π^1_1 な MAD 族が存在する．

証明. $\langle y_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を L の標準的な整列順序で並べられた実数たちとする．$\langle x_n : n \in \omega \rangle$ を ω の無限集合への分割とする．再帰的に $\langle \xi_\alpha, E_\alpha, u_\alpha, x_\alpha : \alpha \in [\omega, \omega_1) \rangle$ を次を満たすように取る：

- ξ_α は次を満たす最小の順序数：$\xi_\beta < \xi_\alpha$ $(\beta < \alpha)$ かつ，$y_\alpha, \langle \xi_\beta, E_\beta, u_\beta, x_\beta : \beta < \alpha \rangle \in L_{\xi_\alpha}$ かつ L_{ξ_α} は point-definable.
- E_α は $(\omega, E_\alpha) \simeq (L_{\xi_\alpha}, \in)$ となる実数で L の順序で最小のもの．
- u_α は $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ のすべての元と almost disjoint である．もし y_α がそういう実数なのであれば，$u_\alpha = y_\alpha$ とし，そうでなければ，そのような中で L の順序で最小のもの．
- x_α は次を満たす実数で L の順序で最小のもの：$E_\alpha \leqslant_{\mathrm{T}} x_\alpha$ かつ x_α は $\{x_\beta : \alpha < \beta\}$ のすべての元と almost disjoint であり，$u_\alpha \subseteq x_\alpha$ を満たす．

このような列は補題 5 と補題 6 より存在し，また最小性より一意である．

すると $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が所望の MAD 族となる．

極大性を見よう．仮に y がすべての x_α と almost disjoint だとする．$y = y_{\alpha^*}$ なる番号 α^* をとる．すると構成より，$y = y_{\alpha^*} \subseteq x_{\alpha^*+1}$ となり矛盾．

X が Π^1_1 なことを見るには，次の同値性を観察すればよい．

$$\begin{aligned} x \in X \iff & (\exists E \ (\Delta^1_1 \text{ from } x)) \\ & [E \text{ は } \omega \text{ 上の well-founded な関係で} \\ & \text{その Mostowski 崩壊 } M \text{ で Th が成り立ち} \\ & M \text{ の中にある可算後続順序数の長さの列 } v \text{ があり,} \\ & M \text{ の中で } v \text{ は上の箇条書きの条件を満たす一意的な } x_\alpha \text{ たちの列であり,} \\ & \text{その最後の要素が } x \text{ である}] \end{aligned}$$

ここで，順序数 ξ_α をコードする実数は，x_α から計算可能であり，したがって $\xi_\alpha + \omega \in \omega_1^{x_\alpha}$ であり，$(\omega, E) \simeq (L_{\xi_\alpha+\omega}, \in)$ となる E は x_α から Δ^1_1 に取れることに注意しよう． □

参考文献

[FS18] V. Fischer and J. Schilhan. *Definable Towers*. 2018. arXiv: `1811.08775 [math.LO]`.

[Kun11] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in Logic: Mathematical. College Publications, 2011.

[Mat77] Adrian RD Mathias. "Happy families". *Annals of Mathematical logic* 12.1 (1977), pp. 59–111.

[Mil89] Arnold W Miller. "Infinite combinatorics and definability". *Annals of Pure and Applied Logic* 41.2 (1989), pp. 179–203.