Shelah による Boole 代数の融合

でぃぐにゃん
2023 年 12 月 12 日 作成

概要

本稿では，Shelah が示した次の定理の証明を紹介する：ZFC と到達不能基数の存在が無矛盾であれば，“ZF+DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測である +Baire の性質を持たない実数の集合が存在する”も無矛盾である．

Solovay の方法に則って，まず定義可能な実数の部分集合がすべて Lebesgue 可測なモデルをまず構成し内部モデルに入ることで証明を行うが，その前者のステップで重要なのが強制概念の均質性である．Solovay は Levy 崩壊という強制概念を使ったが，より細かく段階的に均質的な強制概念を構成する手段として Shelah は融合という手法を考案した．均質的な強制概念の段階的構成と同時に実数の名前たちも構成し，その名前たちの解釈が Baire の性質を持たない実数の集合となっていることを見ることで目的の定理を証明する．

本稿では，まず Solovay の方法を復習し，Shelah の融合について述べたあと，上記定理の証明を行う．

目次

1 Solovay の方法

$\mathbb{P}_{\mathcal{N}}$ でランダム強制法を表す．完備 Boole 代数 B と実数の B 名前 $\dot{x}$ に対して，

$$\{[\![s \subseteq \dot{x}]\!] : s \in \omega^{<\omega}\}$$

で生成される部分完備 Boole 代数を $B_{\dot{x}}$ で表す．

補題 1. B を完備 Boole 代数，$\dot{x}$ を B 名前で，

$$B \Vdash \dot{x} \text{ はランダム実数}$$

だとする．また，任意の V の測度正の Borel 集合について $[\![\dot{x} \in A]\!] \neq 0$ だと仮定する．$\dot{r}$ を標準的なランダム実数の $\mathbb{P}_{\mathcal{N}}$ 名前とする．すると同型 $e\colon \mathbb{P}_{\mathcal{N}} \to B_{\dot{x}}$ で

$$B \Vdash e(\dot{r}) = \dot{x}$$

となるものが存在する．

証明. $e\colon \mathbb{P}_\mathcal{N} \to B_{\dot{x}}$ を
$$e([A]_\mathcal{N}) = [\![\dot{x} \in A]\!]^B$$
で定めると良い. $\square$

補題 2. B を完備 Boole 代数とし,
$$B \Vdash V \text{ 上のランダム実数が存在する}$$
を仮定する. G を (V, P) ジェネリックフィルターとし, $x \in V[G] \cap 2^\omega$ を V 上のランダム実数とする. このとき, ランダム実数の B 名前 $\dot{y}$ が存在して, $\dot{y}^G = x$ かつ任意の V の測度正の Borel 集合について $[\![\dot{y} \in A]\!] \neq 0$ となる.

補題 2 の証明は省略する.

定義 3. B を完備 Boole 代数とし, $\dot{a}$ を B 名前とする. B が $(\dot{a}, \mathbb{P}_\mathcal{N})$ 均質的であるとは, 次の条件を満たすときだと定義する：B の任意の完備部分代数 B' で $\mathbb{P}_\mathcal{N}$ と同型なものと, 元 $b \in B$ と完備埋め込み $f\colon \langle B' \cup \{b\}\rangle \to B$ について, 同型 $\varphi\colon B \to B$ が存在して, $f \subseteq \varphi$ かつ $B \Vdash \varphi(\dot{a}) = \dot{a}$ を満たす. ここに, $\langle B' \cup \{b\}\rangle \to B$ は $B' \cup \{b\}$ が生成する B の完備部分代数である.

以下の定理は Solovay が本質的に示したものである.

定理 4 (Solovay)**.** B を完備 Boole 代数, $\dot{a}$ を B 名前とする. 次の 2 つの条件を仮定する.

(1) $B \Vdash$ “V に属するすべての Borel 測度 0 集合の和集合はまた測度 0 である”
(2) B は $(\dot{a}, \mathbb{P}_\mathcal{N})$ 均質的である.

このとき
$$B \Vdash \text{“}\dot{a} \text{ と } V \text{ のパラメータを使って定義される任意の集合は Lebesgue 可測である”.}$$

証明. 2 つの主張を示すことにより, 定理を示す.
主張 A: $\dot{x}$ を実数の B 名前とし $B_{\dot{x}}$ が $\mathbb{P}_\mathcal{N}$ と同型であるとする. $\Psi(x, y)$ を論理式で V からのパラメータを許したものとする. すると $[\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B \in B_{\dot{x}}$ である.
$\because$) 背理法で, $[\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B \notin B_{\dot{x}}$ とする. すると $\langle B_{\dot{x}} \cup \{[\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B\}\rangle$ 上の自己同型であって, $\pi \restriction B_{\dot{x}} = \mathrm{id}$ かつ $\pi([\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B) \neq [\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B$ なものを取れる (Boole 代数に関する一般論である; Jech [Jec78] の Lemma 25.13 を見よ). 仮定 (2) より π は B 上の自己同型 ϕ で $B \Vdash \phi(\dot{a}) = \dot{a}$ を満たすものに延長できる. すると
$$\pi([\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B) = \phi([\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B) = [\![\Psi(\phi(\dot{x}), \phi(\dot{a}))]\!]^B = [\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]^B$$
となって矛盾する. //

$\Psi(x, y)$ を論理式で V からのパラメータを許したものとする. 仮定 (1) および補題 1, 2 より, $\mathbb{P}_\mathcal{N} \lessdot B$ としてよい. $\dot{r}$ を標準的なランダム実数の $\mathbb{P}_\mathcal{N}$ 名前とする. 主張 A より $[\![\Psi(\dot{r}, \dot{a})]\!]^B \in \mathbb{P}_\mathcal{N}$ である. A を Borel 集合で $[A]_\mathcal{N} = [\![\Psi(\dot{r}, \dot{a})]\!]^B$ とする.
主張 B: x を $V[G] \cap 2^\omega$ を V 上のランダム実数としたとき,
$$V[G] \models \text{“}\Psi(x, \dot{a}^G) \leftrightarrow x \in A\text{”}.$$

$\because$) $\dot{x}$ を $\dot{x}^G = x$ となる名前で，

$$B \Vdash \dot{x} \text{ はランダム実数}$$

かつ，任意の測度正の Borel 集合 C で V の元でコードされたものに対して

$$[\![\dot{x} \in C]\!]^B \neq 0$$

が成り立つものをとる．補題 2, よりこれは取れる．補題 1, より同型 $e\colon B_{\dot{x}} \to \mathbb{P}_{\mathcal{N}}$ であって

$$B \Vdash e(\dot{x}) = \dot{r}$$

なものを取れる．仮定 (2) より $\pi\colon B \to B$ を同型で e を延長し，$B \Vdash \pi(\dot{a}) = \dot{a}$ なものを取る．

すると

$$\begin{aligned}
V[G] \models \Psi(x, \dot{a}^G) &\iff V[G] \models [\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!] \in G \\
&\iff V[G] \models \pi([\![\Psi(\dot{x}, \dot{a})]\!]) \in \pi[G] \\
&\iff V[G] \models [\![\Psi(\dot{r}, \dot{a})]\!] \in \pi[G] \\
&\iff V[G] \models [\![\Psi(\dot{r}, \dot{a})]\!] \in \pi[G] \cap \mathbb{P}_{\mathcal{N}} \\
&\iff V[G] \models [A]_{\mathcal{N}} \in \pi[G] \cap \mathbb{P}_{\mathcal{N}} \\
&\iff V[G] \models \dot{r}^{\pi[G] \cap \mathbb{P}_{\mathcal{N}}} \in A \quad (\because \text{標準ランダム名前の定義}) \\
&\iff V[G] \models \dot{x}^G \in A \\
&\iff V[G] \models x \in A
\end{aligned}$$

となる． //

あとは，仮定 (1) より測度 1 にランダム実数が存在することを使えば，主張 B より定理が従う． □

定理 5 (Solovay)**.** 実数の集合であって，$\mathrm{On}^\omega \cup \{A\}$ 上定義可能なものはすべて Lebesgue 可測であると仮定する．このとき

$$\mathsf{HOD}(\mathrm{On}^\omega \cup \{A\}) \models \text{“}\mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \text{任意の実数の集合は Lebesgue 可測”}.$$

2 Boole 代数の融合法

B' を完備 Boole 代数 B の完備部分代数とする．B の B' の上への射影 $\pi^B_{B'}\colon B \to B'$ を次で定める：

$$\pi^B_{B'}(b) = \prod\{b' \in B' : b \leqslant b'\}.$$

文脈が明らかなときは $\pi^B_{B'}$ の添字の B と B' を省略する．

次の主張は簡単に示せる：

補題 6. (1) $b' \in B', b \in B$ ならば，$b' \cdot b \neq 0$ と $b' \cdot \pi(b) \neq 0$ は同値．

(2) $b' \in B', b \in B$ ならば，$\pi(b' \cdot b) = b' \cdot \pi(b)$.

証明．(1) について．$b \leqslant \pi(b)$ だから $\Rightarrow$ は明らか．$\Leftarrow$ の対偶を示す．$b' \cdot b = 0$ とすると $b \leqslant -b' \in B'$. π の定義より，$\pi(b) \leqslant -b'$. よって $b' \cdot \pi(b) = 0$.

(2) について．$\pi(b' \cdot b) \leqslant b' \cdot \pi(b)$ は自明．元 $c' \in B'$ で，$0 \neq c' \leqslant b' \cdot \pi(b)$ なるものを考える．すると，$b' \cdot c' \cdot \pi(b) \neq 0$. (1) より $b' \cdot c' \cdot b \neq 0$. 再び (1) より $\pi(b' \cdot b) \cdot c' \neq 0$.

さて，$\pi(b' \cdot b) < b' \cdot \pi(b)$ と仮定しよう．このとき前の段落の c' として $c' = b' \cdot \pi(b) - \pi(b' \cdot b)$ を考えると矛盾する． □

2.1 1 ステップの融合法

$f_1\colon B_0 \to B_1$ と $f_2\colon B_0 \to B_2$ を完備埋め込みとする．

$$B_1 \times_{f_1,f_2} B_2 = \{(b_1,b_2) \in B_1 \times B_2 : f_1^{-1}(\pi_1(b_1)) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_1)) \neq 0\}$$

とおく．ここに，$i=1,2$ に対して

$$\pi_i = \pi^{B_i}_{\mathrm{ran}\, f_i}$$

である．$B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ は

$$(b'_1, b'_2) \leqslant (b_1,b_2) \iff b'_1 \leqslant b_1 \text{ and } b'_2 \leqslant b_2$$

で順序付けられる．B_1 と B_2 の f_1, f_2 による融合は

$$B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2 = \text{the completion of } B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$$

で定義される．

補題 7. $B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2$ の中で，任意の $b_0 \in B_0$ に対して

$$(f_1(b_0), 1) = (1, f_2(b_0))$$

が成り立つ．

証明. $(f_1(b_0), 1)$ 以下の条件 $(b_1,b_2) \in B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ を任意にとる．このとき $(b_1, f_2(b_0), b_2) \in B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ を示そう．もしこれが示されれば，$(b_1, f_2(b_0), b_2)$ は (b_1,b_2) と $(1, f_2(b_0))$ の共通拡大となるので，$(f_1(b_0),1) \leqslant (1, f_2(b_0))$ が $B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2$ の中で成り立つことが分かる (半順序の完備 Boole 代数への完備化は分離商を経由することを思い出そう).

$$\begin{aligned}
&f_1^{-1}(\pi(b_1)) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(f_2(b_0) \cdot b_2))\\
&= f_1^{-1}(\pi(b_1)) \cdot f_2^{-1}(f_2(b_0) \cdot \pi_2(b_2))\\
&= f_1^{-1}(\pi(b_1)) \cdot b_0 \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2))\\
&= f_1^{-1}(f_1(b_0) \cdot \pi(b_1)) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2))\\
&\geqslant f_1^{-1}(\pi(b_1)) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2))\\
&> 0
\end{aligned}$$

である．ここに最後から 2 つ目の不等号は，$b_1 \leqslant f_1(b_0)$ なので，$\pi_1(b_1) \leqslant f_1(b_0)$ なことを使った．よって，$(b_1, f_2(b_0), b_2) \in B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ である． □

写像 $e_1\colon B_1 \to B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2$ と $e_2\colon B_2 \to B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2$ を次で定める：

$$\begin{aligned}
e_1(b) &= (b, 1),\\
e_2(b) &= (1, b).
\end{aligned}$$

補題 8. e_1 と e_2 はともに完備埋め込みである．

証明. e_1 が極大反鎖を保つことを示そう．$A \subseteq B_1$ を極大反鎖とする．$(b_1,b_2) \in B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ を固定する．すると

$$f_1^{-1}(\pi_1(b_1)) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2)) \neq 0.$$

両辺に f_1 を適用して

$$\pi_1(b_1) \cdot f_1(f_2^{-1}(\pi_2(b_2))) \neq 0.$$

補題 6 より，

$$b_1 \cdot f_1(f_2^{-1}(\pi_2(b_2))) \neq 0.$$

よって $A \subseteq B_1$ の極大性より，$a \in A$ がとれて，

$$a \cdot b_1 \cdot f_1(f_2^{-1}(\pi_2(b_2))) \neq 0.$$

補題 6 より，

$$\pi_1(a \cdot b_1) \cdot f_1(f_2^{-1}(\pi_2(b_2))) \neq 0.$$

よって，

$$f_1^{-1}(\pi_1(a \cdot b_1)) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2)) \neq 0.$$

したがって，$(a \cdot b_1, b_2) \in B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ である．ゆえに $e_1(a)$ と (b_1, b_2) は両立する． □

次の補題に向けて商代数の復習をする．$i\colon B_0 \to B$ が完備埋め込み，G_0 が (V, B_0) ジェネリックフィルターのとき，商代数 $(B : B_0)^G$ は

$$(B : B_0)^G = B/{\sim}$$

である．ただし $\sim$ は $b \sim c \iff (b \triangle c)^{\mathrm{c}} \in i(G){\uparrow}$ で定義される同値関係．この順序は,

$$[b] \leqslant [c] \iff (b - c)^{\mathrm{c}} \in i(G){\uparrow}$$

で入る．

補題 9. $B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2$ は $B_0 \star ((B_1 : f_1[B_0]) \times (B_2 : f_2[B_0]))$ と強制同値.

証明. G_0 を (V, B_0) ジェネリックフィルターとする．このとき，$V[G_0]$ の中に稠密埋め込み

$$k\colon (B_1 : f_1[B_0])^{G_0} \times (B_2 : f_2[B_0])^{G_0} \to (B_1 \otimes_{f_1,f_2} B_2 : e_1 f_1[B_0])_0^G$$

があることを示す．$V[G_0]$ で議論する．そのような k を

$$k([b_1]_{f_1[G_0]\uparrow}, [b_2]_{f_2[G_0]\uparrow}) = [(b_1, b_2)]_{e_1 f_1[G_0]\uparrow}$$

で定める．

まずこの k の well-definedness を確認する．

$$[b_1]_{f_1[G_0]\uparrow} = [b_1']_{f_1[G_0]\uparrow}$$
$$[b_2]_{f_2[G_0]\uparrow} = [b_2']_{f_2[G_0]\uparrow}$$

を仮定する．すると商代数の定義より，$b_0 \in G_0$ がとれて

$$f_1(b_0) \cdot b_1 = f_1(b_0) \cdot b_1'$$
$$f_2(b_0) \cdot b_2 = f_2(b_0) \cdot b_2'$$

となる．

<u>主張：</u> 条件 $(b_1'', b_2'') \leqslant (b_1, b_2)$ が $B_1 \times_{f_1,f_2} B_2$ 内で (b_1', b_2') と両立不可能とする．このとき $(f_1(b_0), 1) \perp (b_1'', b_2'')$.

∵)

$$
\begin{aligned}
&f_1^{-1}(\pi_1(f_1(b_0)b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2'')) \\
&= b_0 \cdot f_1^{-1}(\pi_1(b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2'')) \\
&= b_0 \cdot b_0 \cdot f_1^{-1}(\pi_1(b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2'')) \\
&= f_1^{-1}(\pi_1(f_1(b_0)b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(f_2(b_0)b_2'')) \\
&= f_1^{-1}(\pi_1(f_1(b_0)b_1b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(f_2(b_0)b_2b_2'')) \\
&= f_1^{-1}(\pi_1(f_1(b_0)b_1'b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(f_2(b_0)b_2'b_2'')) \\
&\leqslant f_1^{-1}(\pi_1(b_1'b_1'')) \cdot f_2^{-1}(\pi_2(b_2'b_2'')) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

//

この主張より $[(b_1, b_2)]_{e_1 f_1[G_0]\uparrow} \leqslant [(b_1', b_2')]_{e_1 f_1[G_0]\uparrow}$ が従う．逆向きの不等号も同様である．

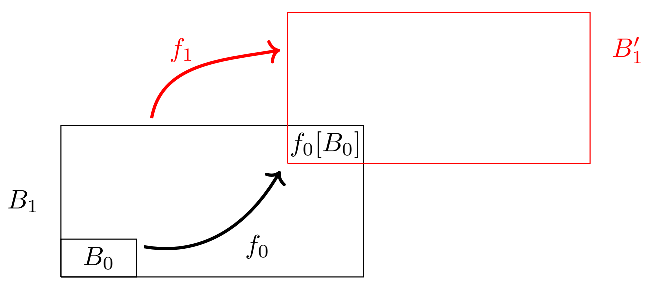
対 (b, c) を $B_1 \times_{f_1, f_2} B_2$ の元としてみたものをここでは $\langle b, c\rangle$ と書くことにする．$H = e_1 f_1[G_0]\uparrow$ とおく．

商代数の定義より，$(\langle b_1, b_2\rangle - \langle b_1', b_2'\rangle)^{\mathrm{c}} \in H$ を示せば良い．ところが，$b_1'' = b_1 - b_1'$, $b_2'' = b_2 - b_2'$ とおくと，$\langle b_1'', b_2''\rangle = \langle b_1, b_2\rangle - \langle b_1', b_2'\rangle$ が得られる．このとき，上の主張より $H \ni \langle f_1(b_0), 1\rangle \leqslant (\langle b_1'', b_2''\rangle)^{\mathrm{c}} \leqslant (\langle b_1, b_2\rangle - \langle b_1', b_2'\rangle)^{\mathrm{c}}$ なのでよい．

□

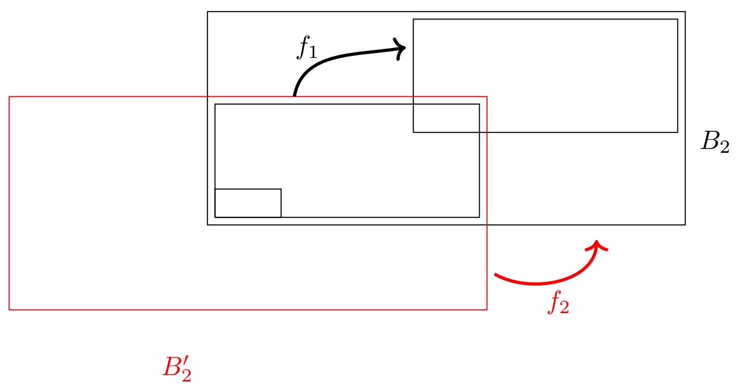
2.2 ω ステップの融合法

$B_0 \lessdot B_1$ かつ $f_0 \colon B_0 \to B_1$ を完備埋め込みとする．B_1' を B_1 の同型なコピーで $f_1 \colon B_1 \to B_1'$ を同型で f_0 を延長するものとする．



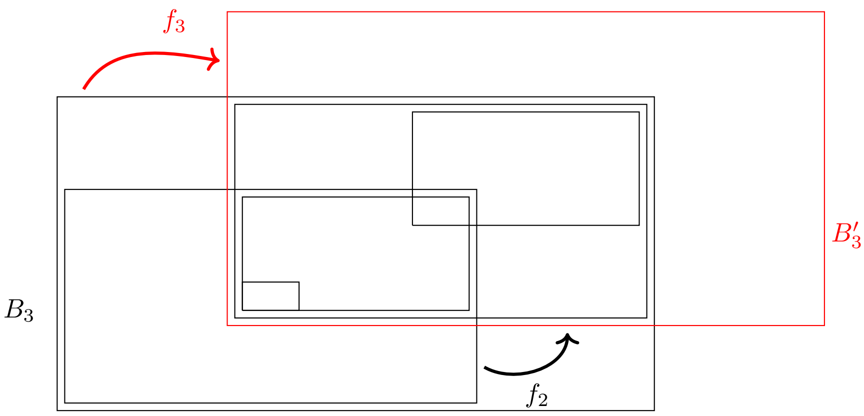
$B_2 = B_1 \otimes_{f_0, \mathrm{id}} B_1'$ とおき，対応する e_1, e_2 は包含写像として，$B_1, B_1' \subseteq B_2$ とする．

B_2' を B_2 の同型なコピーで $f_2 \colon B_2' \to B_2$ を同型で f_1 を延長するものとする．



$B_3 = B_2 \otimes_{\mathrm{id}, \mathrm{id}} B_2'$ とおき，対応する e_1, e_2 は包含写像として，$B_2, B_2' \subseteq B_3$ とする．

B_3' を B_3 の同型なコピーで $f_3\colon B_3 \to B_3'$ を同型で f_2 を延長するものとする．



このように偶数ステージと奇数ステージで構成を変え，繰り返す．最後に B_ω を $\bigcup_{n\in\omega} B_n$ の完備化とする．$f_\omega\colon B_\omega \to B_\omega$ をすべての f_n $(n\in\omega)$ を延長する同型写像として一意に定められる．

こうして得られる組 (B_ω, f_ω) を B_1 **の** f_0 **上の** ω **ステップの融合**と呼ぶ．

3 融合法と unbounded な実数の関係

補題 10. P と Q を強制概念とする．$\dot{x}$ が P 名前で，$P \Vdash$ "$\dot{x}$ は V 上 unbounded な実数" と仮定する．このとき $P\times Q \Vdash$ "$\dot{x}$ は V^Q 上 unbounded な実数" である．

証明. $(p,q)\in P\times Q$, $\dot{y}$ を Q 名前，$(p,q)\Vdash \dot{x}\leqslant\dot{y}$ と仮定する．各 $n\in\omega$ について $q_n\leqslant q$ と $y(n)$ を取り，$q_i\Vdash \dot{y}(n)=y(n)$ とする．y はグラウンドモデルの実数となるので，仮定より， $p'\leqslant p$ と $n\in\omega$ が見つかり，$p'\Vdash y(n)\leqslant\dot{x}(n)$. すると

$$(p', q_n)\Vdash \text{“}\dot{x}(n)\leqslant\dot{y}(n)=y(n)<\dot{x}(n)\text{”}$$

となり矛盾. □

補題 11. $i=1,2$ に対して $f_i\colon B_0\to B_i$ を完備埋め込みとする．$\dot{x}$ を B_1 名前で

$$B_1 \Vdash \text{“}\dot{x}\text{ は }V^{f_1[B_0]}\text{ 上 unbounded”}$$

とする．このとき

$$B_1\otimes_{f_1,f_2} B_2 \Vdash \text{“}e_1(\dot{x})\text{ は }V^{e_2[B_2]}\text{ 上 unbounded”}.$$

証明. 補題 10 と補題 9 より従う. □

補題 12. $B_0 \lessdot B$ かつ $f_0\colon B_0\to B$ を完備埋め込みとする．(B_ω, f) を ω ステップの B の f_0 上の融合とする．$\dot{x}$ を B 名前で

$$B\Vdash \text{“}x\text{ は }V^{B_0}\cup V^{f[B_0]}\text{ 上 unbounded ”}$$

とする．このとき任意の $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ について

$$B_\omega\Vdash \text{“}f^n(x)\text{ は }V^B\text{ 上 unbounded ”}.$$

ここに f^n は f の n 回合成である．

証明. 補題 11 を繰り返し使えば分かる. □

補題 13. $B_0 \lessdot B_1 \lessdot B$ かつ $B_0 \lessdot B_2 \lessdot B$ は

$$B_0 \Vdash \text{“}(B_1 : B_0) \text{ と } (B_2 : B_0) \text{ はともにランダム強制法と同型”}$$

を満たすものとする．$f\colon B_1 \to B_2$ を同型で $f \restriction B_0 = \mathrm{id}_{B_0}$ を満たすものとする．(B_ω, f_ω) を ω ステップの B の f 上の融合とする．このとき任意の B 名前 $\dot{x}$ であって，$B \Vdash$ “$\dot{x}$ は V^{B_0} 上 unbounded” を満たすものに対して，任意の $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ について，

$$B_\omega \Vdash \text{“}f_\omega^n(\dot{x}) \text{ は } V^B \text{ 上 unbounded”}$$

となる．

証明．ランダム強制法が ω^ω-bounding なことから，補題 12 の結論が満たされ，この補題が分かる． □

4 LM + ¬BP の無矛盾性証明

κ を到達不能基数とする．列 $\langle B_\xi, \Gamma_\xi : \xi \leqslant \kappa \rangle$ を次を満たすように構成する．

(1) B_ξ はサイズ $<\kappa$ の完備 Boole 代数，Γ_ξ は B_ξ 名前の集合

(2) $\xi < \zeta$ ならば $B_\xi \lessdot B_\zeta$ かつ $\Gamma_\xi \subseteq \Gamma_\zeta$ である．また，$\dot{x} \in \Gamma_\zeta \setminus \Gamma_\xi$ に対して $B_\xi \Vdash$ “$\dot{x}$ は V^{B_ξ} 上 unbounded な実数” を満たす．

(3) λ が極限順序数ならば，$B_\lambda = \varinjlim_{\xi<\lambda} B_\xi$ かつ $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$.

(4) $B_{\xi_0} \lessdot B^1 \lessdot B_\kappa$ かつ $B_{\xi_0} \lessdot B^2 \lessdot B_\kappa$ かつ

$$B_{\xi_0} \Vdash \text{“}(B^1 : B_{\xi_0}) \text{ と } (B^2 : B_{\xi_0}) \text{ はともにランダム代数と同型”}$$

であるとする．また，$f_0\colon B^1 \to B^2$ を同型で $f_0 \restriction B_{\xi_0} = \mathrm{id}_{B_{\xi_0}}$ であるとする．このとき列 $\langle \xi_\iota : \iota < \kappa \rangle$ と $\langle f_\iota : \iota > \kappa \rangle$ が存在し，次を満たす．

(a) ξ_ι は κ 内で共終単調増加な列である

(b) $(B_{\xi_{\iota+1}+1}, f_{\iota+1})$ は $B_{\xi_{\iota+1}}$ の f_ι 上の ω ステップの融合の結果である

(c) $\Gamma_{\xi_{\iota+1}+1} = \{f_{\iota+1}^k(\dot{x}) : \dot{x} \in \Gamma_{\xi_{\iota+1}}, k \in \mathbb{Z}\}$

(d) 極限順序数 λ について $f_\lambda = \varinjlim_{\iota<\lambda} f_\iota$

(5) 非有界な ξ について $B_{\xi+1} = B_\xi * \dot{\mathcal{C}}$, $\Gamma_{\xi+1} = \Gamma_\xi$. ここに $\mathcal{C}$ は Cohen 強制法.

(6) 非有界な ξ について $B_{\xi+1} = B_\xi * \dot{\mathcal{C}}$, $\Gamma_{\xi+1} = \Gamma_\xi \cup \{\dot{c}_s : s \in \omega^{<\omega}\}$. ここに $\dot{c}_s$ は $\mathcal{C}$ によって追加される Cohen 実数であって，s を通るもの.

(7) 非有界な ξ について $B_{\xi+1} = B_\xi * \dot{\mathcal{A}}$, $\Gamma_{\xi+1} = \Gamma_\xi$. ここに $\mathcal{A}$ はアメーバ強制.

簡単に構成の手順を述べる．(4) を満たすことを保証するために，bookkeeping を行う．(4)(c) で定義した $\Gamma_{\xi_{\iota+1}+1}$ がまだ (2) の unboundedness の条件を持っていることを保証するために，補題 13 を使う．

$B = B_\kappa, \Gamma = \Gamma_\kappa$ とおく．

<u>主張 A:</u> $B \Vdash$ “κ は非可算基数”.

∵) B はサイズ κ 未満の強制法の順極限だから κ 連鎖条件を持つ．よってよい． //

<u>主張 B:</u> B は次を強制する：“実数の任意の集合であって，順序数の可算列および Γ^G から定義可能なものは Lebesgue 可測”.

∵) G を (V, B) ジェネリックフィルターとする．$\Psi(x, y)$ を論理式で順序数の可算列 $a \in V[G]$ をパラメータに持つものとする．$\xi_0 < \kappa$ を $a \in V[G_{\xi_0}]$ となるものとしてとる．$V[G_{\xi_0}]$ で議論しよう．条

件 (4) より，商代数 $(B : B_{\xi_0})^{G_{\xi_0}}$ は $(\Gamma, \mathbb{P}_{\mathcal{N}})$ 均質的である．また，条件 (7) より，$(B : B_{\xi_0})^{G_{\xi_0}}$ は $V[G_{\xi_0}]$ の実数でコードされる測度 0Borel 集合すべての和集合が測度 0 となることを強制する．したがって，定理 4 より，$V[G]$ で $\{x \in 2^\omega : \Psi(x, \Gamma^G)\}$ がルベーグ可測であることが成り立つ． //

主張 C: 任意の $s \in \omega^{<\omega}$ について，$\Gamma^G \cap [s]$ は non-meager である．

$\because$) $\dot{F}$ を B 名前で meager F_σ な $[s]$ の部分集合と解釈されるものとする．$\xi < \kappa$ を $\dot{F}$ が B_ξ 名前なものをとる．$\zeta > \xi$ をとり，$B_{\zeta+1} = B_\zeta * \dot{C}$ かつ $\Gamma_{\zeta+1} = \Gamma_z eta \cup \{\dot{c}_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ とする．実数 $\dot{c}_s^G$ は $V[G_\zeta]$ 上 Cohen なので，$\dot{c}_s^G \notin \dot{F}^G$ である．よって，$[s] \cap (\Gamma^G \setminus \dot{F}^G) \neq \varnothing$. //

主張 D: 任意の $s \in \omega^{<\omega}$ について，$\Gamma^G \cap [s]$ は完全集合を含まない．

$\because$) $\dot{T}$ を B 名前で ω 上の完全木であって，$\mathrm{root}(\dot{T}) \supseteq s$ なものと解釈されるものとする．$\xi < \kappa$ を $\dot{T}$ が B_ξ 名前なものをとる．$\zeta > \xi$ をとり，$B_{\zeta+1} = B_\zeta * \dot{C}$ かつ $\Gamma_{\zeta+1} = \Gamma_\zeta$ とする．

実数 $c \in [\dot{T}^G]$ を $B_{\xi+1} \cap G$ によって新しく追加されるパスとする．明らかに，$c \notin \Gamma_\zeta^G$ であり，$\Gamma^G \setminus \Gamma_\zeta^G$ の各元は $V[G_\zeta] = V[G_{\zeta+1}]$ 上 unbounded なので，$c \notin \Gamma^G$ が従う． //

主張 C と D より，Γ^G が Baire の性質を持たないことがわかる．なぜなら，Baire の性質を持つ集合はある基本開集合 $[s]$ において meager または comeager となるからである．

以上のことと定理 5 を組み合わせれば，次を得る．

定理 14 (Shelah)**.** ZFC と到達不能基数の存在が無矛盾であれば，“ZF+DC+ 任意の実数の集合が Lebesgue 可測である +Baire の性質を持たない実数の集合が存在する”も無矛盾である．

参考文献

[Jec78] T. Jech. *Set Theory*. ISSN. Elsevier Science, 1978.

[JR93] Haim Judah and Andrzej Rosłanowski. “On Shelah’s amalgamation”. *Israel Mathematical Conference Proceedings*. Vol. 6. Citeseer. 1993, pp. 385–414.

[She85] Saharon Shelah. “On measure and category”. *Israel Journal of Mathematics* 52 (1985), pp. 110–114.