共終数の初歩

でぃぐ

2023 年 2 月 1 日 作成
2023 年 2 月 2 日 更新

概要

公理的集合論の入門におけるトピックの一つ，共終数について初歩的な内容をまとめた．

目次

1　共終数の初歩

本稿では，選択公理を含めた公理系 ZFC のもとで議論する．また空な半順序や，最大元を持つ半順序は述べることなく議論の対象から外すことがある．

定義 1.1. $(P, \leq)$ を半順序集合とする．κ を基数とする．P が **$<\kappa$-directed** とは，任意の P の集合で濃度が κ 未満なものに対して，その共通上界が P の中に取れることを言う．P が **$\leq\kappa$-directed** とは $<\kappa^+$-directed であることを言う．

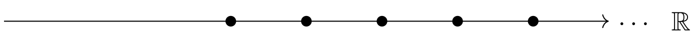
定義 1.2. $(P, \leq)$ を半順序集合とする．部分集合 $D \subseteq P$ が**共終**であるとは，任意の $p \in P$ に対して $d \in D$ が存在して $p \leq d$ となることを意味する．P の**共終数**を

$$\mathrm{cf}(P) = \min\{|D| : D \text{ は } P \text{ の共終部分集合 }\}$$

と定める．

共終数はインフォーマルには「その半順序集合の頂上を近似するのに必要な元の個数」である．

例 1.3. 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の通常の順序を考える．このとき，$\mathrm{cf}(\mathbb{R}) = \aleph_0$ である．実際，$\mathbb{N}$ が $\mathbb{R}$ の共終部分集合であり，有限な共終部分集合はないからである．



P それ自身は P の共終部分集合だから $\mathrm{cf}(P) \le |P|$ が分かる．

命題 1.4. P を半順序集合，$D \subseteq P$ を共終部分集合とする．このとき $\mathrm{cf}(P) = \mathrm{cf}(D)$ である．

証明. D の共終部分集合は P の共終部分集合でもある．よって，$\mathrm{cf}(P) \le \mathrm{cf}(D)$ が分かる．逆向き $\mathrm{cf}(D) \le \mathrm{cf}(P)$ を示そう．P の共終部分集合 E で $|E| = \mathrm{cf}(P)$ なものを取る．各 $e \in E$ に対して $d_e \in D$ を $e \le d_e$ なる元として選ぶ．すると $\{d_e : e \in E\}$ は D の中で共終であり，濃度は $|E| = \mathrm{cf}(P)$ 以下である．よって，$\mathrm{cf}(D) \le \mathrm{cf}(P)$ が示された． □

定義 1.5. 極限順序数 γ に対して $\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma$ であるとき，γ は**正則**であるという．

共終数は定義より必ず基数であるから，正則な順序数は基数である．

命題 1.6. 任意の極限順序数 γ に対して，真に単調増大で像が共終な列 $f\colon \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ が存在する．

証明. D を濃度 $\mathrm{cf}(\gamma)$ の γ の共終部分集合とする．D を $\{\alpha_i : i < \mathrm{cf}(\gamma)\}$ と整列する．i について帰納的に f を $f(i) > \sup_{j<i} f(j), \alpha_i$ となるように定めれば，これが求めていたものである．ここで $\sup_{j<i} f(j)$ が γ の中で共終であることはありえないことに注意する． □

命題 1.7. 任意の極限順序数 γ に対して，$\mathrm{cf}(\gamma)$ は正則，すなわち $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma)) = \mathrm{cf}(\gamma)$.

証明. $f\colon \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ を命題 1.6 の条件を満たすものとする．このとき

$$\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\operatorname{ran} f) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma)).$$

ここで第 1 の等式は $\operatorname{ran} f$ が γ の中で共終なこと，第 2 の等式は $\operatorname{ran} f$ と γ が順序同型なことを使っている． □

一方で一般の半順序集合 P に対して，共終数 $\mathrm{cf}(P)$ は必ずしも正則とは限らない．たとえば，$\aleph_\omega$ に離散順序を入れたものなどが挙げられる．

命題 1.8. 正則基数 κ について，κ は $<\kappa$-directed である．

証明. X を濃度 κ 未満の κ の部分集合とする．$\sup X = \kappa$ だとすると，$\mathrm{cf}(\kappa) \le |X| < \kappa$ となって，κ の正則性に反する．よって，$\sup X < \kappa$ である． □

命題 1.9. 後続基数はすべて正則である．

証明. κ を基数とする．κ^+ が正則なことを示す．$X \subseteq \kappa^+$ を濃度 κ 以下な部分集合とする．X が共終でないこと，すなわち $\sup X < \kappa^+$ を示せばよい．各 $\alpha \in X$ は $|\alpha| \le \kappa$ だから $|\bigcup X| \le \kappa$ を得る ($|\kappa \times \kappa| = \kappa$ を使う)．よって，$\sup X = \bigcup X < \kappa^+$ である． □

命題 1.10. 任意の極限順序数 γ に対して $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma)$ である．

証明. $\{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\}$ が γ の中で共終なので

$$\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\}) = \mathrm{cf}(\gamma).$$ □

2 真の共終数

定義 2.1. $(P, \leq)$ を半順序集合とする．

$$\mathrm{tcf}(P) = \min\{\mathrm{type}(A) : A \text{ は } P \text{ の共終な整列部分集合 }\}$$

と定め，P の**真の共終数**とする．ただし $\mathrm{type}(A)$ は整列集合 A の順序型を表す．

$\mathrm{tcf}(P)$ は定まらないときがある．つまり，P の共終な整列部分集合は必ずしも存在するとは言えない．たとえば，$\leq$2-directed でない半順序集合 P の $\mathrm{tcf}(P)$ は定まらない．また，directed であっても，$\mathrm{tcf}(P)$ は定まるとは限らない．たとえば，$\omega \times \omega_1$ に座標ごとの順序を入れた半順序集合は真の共終数が定まらない．

命題 2.2. 任意の全順序集合 P に対して，$\mathrm{tcf}(P)$ は存在する．

証明. P の真に単調増加な列 $\langle x_\alpha : \alpha \rangle$ を次のように構成していく．α 未満まで定義し終えたとき，$\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ が P の中で共終ならば列の構成をそこで止める．そうでなければ，共終でないことと P が全順序なことより今まで構成した列の中の元すべてより大きい元が存在するので，その一つを x_α とする．

この列の構成は必ずどこかで止まる．実際，$|P|^+$ 未満で止まる．P の濃度より大きい濃度の，各元が異なるような列は取れないからだ．

するとこの列は共終であるとわかる．したがって，P の共終な整列部分集合が存在する (この列の値域が一例である)． □

命題 2.3. $\mathrm{tcf}(P)$ が存在するとき P は $<\mathrm{tcf}(P)$-directed である．

証明. A を P の共終な整列部分集合で $\mathrm{type}(A) = \mathrm{tcf}(P)$ なものとする．X を濃度 $\mathrm{tcf}(P)$ 未満の P の部分集合とする．各 $x \in X$ について，A の元 a_x で $x \leq a_x$ なものを取る．a_x すべてより上にある元 b を取る．$\mathrm{type}(A)$ が正則なのでこれは取れる (命題 1.8)．b が求めるべき共通の上界である． □

命題 2.4. $\mathrm{tcf}(P)$ が存在するとき，$\mathrm{cf}(P) = \mathrm{tcf}(P)$.

証明. 一般に整列集合 A に対して $|A| \leq \mathrm{type}(A)$ という関係があるため，$\mathrm{cf}(P) \leq \mathrm{tcf}(P)$ が分かる．逆向き $\mathrm{tcf}(P) \leq \mathrm{cf}(P)$ を示そう．

P の共終な整列部分集合 A で $\mathrm{type}(A) = \mathrm{tcf}(P)$ なものを取る．また，P の共終な部分集合 D で $|D| = \mathrm{cf}(P)$ なものを取る．D の元を整列して，$\{d_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(P)\}$ とする．このとき，順序型が $\mathrm{cf}(P)$ 以下である P の共終整列部分集合を作れたら，証明が終わる．

実際それを作ろう．$\langle x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(P) \rangle$ を帰納的に構成する．x_α は A の元であり，今までに構成した列の元すべてより上にあり，d_α よりも上にある元として取る．これは命題 2.3 より取れる．

この列の像は，順序型が $\mathrm{cf}(P)$ 以下である P の共終整列部分集合である． □

命題 2.5. $\mathrm{tcf}(P)$ が存在するような半順序集合 P について，$\mathrm{tcf}(P)$ は正則.

証明. A を P の共終な整列部分集合で $\mathrm{type}(A) = \mathrm{tcf}(P)$ なものとする．順序同型 $g\colon \mathrm{type}(A) \to A$ を取る．$f\colon \mathrm{cf}(\mathrm{type}(A)) \to \mathrm{type}(A)$ を真に単調増加かつ像が共終な写像とする (命題 1.6)．このとき

$g \circ f\colon \mathrm{cf}(\mathrm{type}(A)) \to A$ の像は P の中で共終かつ整列している．よってその順序型 $\mathrm{cf}(\mathrm{type}(A))$ は $\mathrm{tcf}(P)$ 以上である．一方で $\mathrm{cf}(\mathrm{type}(A)) \leq \mathrm{type}(A) = \mathrm{tcf}(P)$ だから $\mathrm{tcf}(P) = \mathrm{cf}(\mathrm{type}(A))$ である．$\mathrm{cf}(\mathrm{type}(A))$ は命題 1.7 より正則なのでこれで示された． □

命題 2.6. P を半順序集合，λ を正則基数とする．真に単調増大で像が共終な写像 $f\colon \lambda \to P$ があると仮定する．このとき，$\mathrm{tcf}(P) = \lambda$.

証明. 仮定のもと，f の像 $\mathrm{ran}\, f$ が共終かつ整列している P の部分集合なので，$\mathrm{tcf}(P)$ は存在する．

$$\mathrm{tcf}(P) = \mathrm{cf}(P) = \mathrm{cf}(\mathrm{ran}\, f) = \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$$

より良い． □

3　おまけ

定義 3.1. P を半順序集合とする．$\mathfrak{b}(P) = \min\{\kappa : P$ は $\leq \kappa$-directed ではない $\}$ とおく．これを P の unbounding number という．

以下の命題の証明は省略する．

命題 3.2. P が真の共終数 $\mathrm{tcf}(P)$ を持つことと，$\mathfrak{b}(P) = \mathrm{cf}(P)$ は同値である．

事実 3.3. ω^ω に順序関係 $\leq^*$ を $x \leq^* y$ であるのは，ある $n \in \omega$ があって，すべての $m \geq n$ で $x(m) \leq y(m)$ となっているときと定める．このとき，命題 $\mathfrak{b}(\omega^\omega) = \mathrm{cf}(\omega^\omega)$ は ZFC から独立である．

命題 3.2 と事実 3.3 を使えば，ω^ω が真の共終数を持つことは ZFC から独立であることが分かる．

演習問題 3.4. $\mathrm{cf}([\mathbb{R}]^{\aleph_0}, \subseteq)$ を求めよ．ただし，$[\mathbb{R}]^{\aleph_0}$ は実数からなる可算無限集合の全体の集合である．

4　余談

本稿は Kunen の本 [Kun09] に載っている共終数の説明があまり分かりやすく思えなかったため作ったものである．本稿の説明は大部分を [塩谷 19] を参考にしている．

参考文献

[Jec06] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[Kun09] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics.* Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.

[塩谷 19] 塩谷 真弘. **公理的集合論 講義ノート**. 2019.