$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ と $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明

でぃぐ

2022 年 12 月 4 日 作成
2023 年 3 月 23 日 最終更新

目次

1　定義

連続体濃度を $\mathfrak{c}$ と書く．また，自然数の無限集合の全体の集合を $[\omega]^\omega$ と書く．

定義 1.

1. 自然数の無限集合 A, B について A が B を**分割する**とは，
$$|B \cap A| = |B \setminus A| = \aleph_0$$
を満たすことだとする．
2. 自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ について
   - $\mathcal{S}$ が **splitting family** $\iff (\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A$ が B を分割する$)$
   - $\mathcal{R}$ が **reaping family** $\iff \neg(\exists A \in [\omega]^\omega)(\forall B \in \mathcal{R})(A$ が B を分割する$)$ $\iff (\forall A \in [\omega]^\omega)(\exists B \in \mathcal{R})(A$ が B を分割しない$)$

   と定める．
3. $\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{r}$ を
$$\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ は splitting family}\}$$
$$\mathfrak{r} = \min\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ は reaping family}\}$$
と定義する．

「A が B を分割しない」ということを言い換えると B は A か $\omega \setminus A$ のどちらかのほとんど部分集合であることを意味することに注意する．

$[\omega]^\omega$ それ自体は splitting family でもあるし，reaping family でもある．よって $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{c}$ かつ $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{c}$ が分かる．

本稿では，とても簡単な事実であるが，$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ と $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明を与える．

2 $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ の証明

命題 2. $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$.

証明．自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}$ で高々可算濃度を持つものを任意にとる．$\mathcal{S} = \{A_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく．示すべきことは $\mathcal{S}$ が splitting family でないこと，すなわちある自然数の無限集合 B があって，B はどの A_n にも分割されないことである．帰納法により次のような自然数の無限集合の列 $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ を定める．

1. $B_n \subseteq A_n$ あるいは $B_n \subseteq \omega \setminus A_n$.
2. $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$.

これは取れる．実際，B_n まで取れたとき，B_n が無限集合なので，$B_n \cap A_n$ か $B_n \setminus A_n$ のどちらか一方が無限集合である．すると，無限な方の一方を取り，B_{n+1} と置けばよい．

次に，自然数の列 $\langle b_m : m \in \omega \rangle$ を次を満たすようにとる．

1. $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$.
2. $b_m \in B_m$.

これも帰納的に取っていくことができる．

最後に $B = \{b_m : m \in \omega\}$ とおけば，これはどの A_n にも分割されない．実際，$B_n \subseteq A_n$ ならば，B の元は有限個を除いて A_n の元なので，$B \setminus A_n$ は有限集合であるし，$B_n \subseteq \omega \setminus A_n$ ならば，B の元は有限個を除いて $\omega \setminus A_n$ の元なので，$B \cap A_n$ は有限集合であるからだ．□

3 $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明

3.1 直接証明

命題 3. $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$.

証明．自然数の無限集合の集合 $\mathcal{R}$ で高々可算濃度を持つものを任意にとる．$\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく．示すべきことは $\mathcal{R}$ が reaping family でないこと，すなわちある自然数の無限集合 A があって，A はどの B_n も分割することである．

各自然数 n, m について次の 2 つの種類の要件を満たす A を構成できたら終わりである．

- (要件 $(0, n, m)$) m 以上の自然数が存在して，それは A に属さないが B_n には属す．
- (要件 $(1, n, m)$) m 以上の自然数が存在して，それは A にも B_n にも属す．

$\pi \colon \omega \to \{0,1\} \times \omega \times \omega$ を全単射とする．A を近似する有限二進列の列 $\langle s_i : i \in \omega \rangle$ を次を満たすように構成する．

1. $s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \dots$.
2. s_i を延長する任意の A は要件 $\pi(i)$ を満たす.

これが構成できることを見よう．$s_0 = \varnothing$ とおく．s_i まで構成されたとしよう．$\pi(i+1) = (j,n,m)$ とする．$j=0$ のときは m と s_i の長さより大きくて B_n に属する自然数 k を取り，s_{i+1} を s_i の延長であって k 桁目が 0 なようにとる．$j=1$ のときは m と s_i の長さより大きくて B_n に属する自然数 k を取り，s_{i+1} を s_i の延長であって k 桁目が 1 なようにとる．これで構成された.

最後に A を s_i $(i \in \omega)$ たちの貼り合わせとして定める．すなわち A を特性関数 χ_A が

$$\chi_A = \bigcup_{i \in \omega} s_i$$

となるようにとる. □

3.2 Baire の範疇定理を使う証明

命題 3 の別証明. 本質的に命題 3 と同じことをする.

自然数の無限集合の集合 $\mathcal{R}$ で高々可算濃度を持つものを任意にとる．$\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく.

$n, m \in \omega$ に対して Cantor 空間 2^ω の部分集合 $D_{0,n,m}$ と $D_{1,n,m}$ を次で定める：

$$D_{0,n,m} = \{x \in 2^\omega : m \text{ 以上のある桁 } k \text{ において } x(k) = 0 \text{ かつ } k \in B_n\}$$
$$D_{1,n,m} = \{x \in 2^\omega : m \text{ 以上のある桁 } k \text{ において } x(k) = 1 \text{ かつ } k \in B_n\}$$

これらは Cantor 空間 2^ω の可算個の稠密開集合であるため Baire の範疇定理より共通部分は空でない．共通部分から元を取り，それを特性関数とする A を考えればこれが欲しかったものである. □

3.3 Lebesgue 測度を使う証明

命題 3 の別証明 2. 上の証明の通り，$\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と $D_{0,n,m}, D_{1,n,m}$ を考える．$D_{0,n,m}$ と $D_{1,n,m}$ はどれも Lebesgue 測度 1 なことがわかる.

実際,

$$\mu(2^\omega \setminus D_{0,n,m}) = \mu\left(\bigcap_{k \geq m, k \in B_n} \{x : x(k) = 1\}\right) = \prod_{k \geq m, k \in B_n} \frac{1}{2} = 0$$

なので $D_{0,n,m}$ は測度 1 である．ここで測度の計算に独立性を使った．$D_{1,n,m}$ も同様に測度 1 であると分かる.

よって，共通部分も測度 1 となり，元がある. □

3.4 補足

3.2 節と 3.3 節のそれぞれの証明から情報を抽出すると，次が従う．証明は省略する.

命題 4. $\mathrm{cov}(\mathsf{meager}), \mathrm{cov}(\mathsf{null}) \leq \mathfrak{r}$ かつ $\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathsf{meager}), \mathrm{non}(\mathsf{null})$.

参考文献

[Bla10] Andreas Blass. “Combinatorial cardinal characteristics of the continuum”. *Handbook of set theory*. Springer, 2010, pp. 395–489.