Shoenfield 絶対性の応用としての $\mathbf{\Sigma}^1_1$ Lebesgue 可測性

でぃぐ

2022 年 12 月 8 日

本稿では，Shoenfield 絶対性定理を使って，任意の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合が Lebesgue 可測であることを示す．

次が Shoenfield 絶対性と呼ばれる定理である．証明は Kanamori [Kan08] の Theorem 13.15 か，Jech [Jec03] の Theorem 25.20 を参照せよ．

定理 1 (Shoenfield)**.** ZF の推移的内部モデル M について，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 関係と $\mathbf{\Pi}^1_2$ 関係は絶対的である．

ランダム強制法を $\mathbb{B}$ と書く．すなわち，

$$\mathbb{B} = \{F : F \subseteq 2^\omega, F \text{ は閉集合かつ } \mu(F) > 0\}$$

で順序は通常の包含関係である．

次の補題を準備しておく．

補題 2 ([Kho11, Lemma 2.1.10])**.** 実数の集合 A について A が Lebesgue 測度 0 であることは次と同値である：

$$(\forall B \in \mathbb{B})(\exists C \in \mathbb{B})(C \leq B \wedge C \cap A = \varnothing). \tag{$*$}$$

証明. A が Lebesgue 測度 0 であると仮定し，$B \in \mathbb{B}$ とする．すると $B \setminus A$ は Lebesgue 測度正である．よって測度の正則性によって，測度正な閉集合 $C \in B \setminus A$ がとれる．これで $(*)$ が導かれた．

逆に $(*)$ を仮定する．$D = \{B \in \mathbb{B} : B \cap A = \varnothing\}$ とおくと，D は $\mathbb{B}$ の稠密集合である．そこで極大反鎖 $E \subseteq D$ をとる．$\mathbb{B}$ は可算鎖条件を満たすので，E は可算集合である．よって，$C = 2^\omega \setminus \bigcup E$ は Borel 集合であり，$A \subseteq C$ となる．C はどの $B \in E$ とも disjoint なので，測度 0 集合でないといけない (そうでないとすれば，E の極大性に反する)．したがって，A も測度 0 である． □

ランダム実数についての知識は仮定する．アメーバ強制法とは

$$\mathbb{A} = \{U : U \subseteq 2^\omega, U \text{ は開集合かつ } \mu(U) < 1/2\}$$

で $U' \leq U \iff U \subseteq U'$ と定義される強制法である．重要な性質は次である：

$$\mathbb{A} \Vdash \text{“ランダム実数が測度 1 に存在する”} \tag{1}$$

証明は [BJ95, p.106] を見よ．

また，Borel コードに関する知識も仮定する．Borel コード c の解釈を本稿では $\hat{c}$ と書く．

補題 3. $A=\{x:\varphi(x)\}$ を実数の $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合とする．このとき Borel コード c が存在して

$$\mathbb{A}\Vdash\mu(A\bigtriangleup\hat{c})=0$$

となる．

証明. 標準的なランダム実数の名前を $\dot{r}$ として，ランダム強制法によるブール値 $[\![\varphi(\dot{r})]\!]_{\mathbb{B}}$ を考える．これは Borel 集合なのでその Borel コード c を取る．このとき

$$\mathbb{A}\Vdash(\forall x\colon V\text{ 上のランダム実数})(x\in A\iff x\in\hat{c})$$

である．

実際，G を $(V,\mathbb{A})$ ジェネリックフィルターとして，x を V 上のランダム実数とする．このとき

$$\begin{aligned}V[G]\models x\in A&\iff V[G]\models\varphi(x)\\&\iff V[x]\models\varphi(x)\\&\iff V[x]\models x\in\hat{c}\\&\iff V[G]\models x\in\hat{c}\end{aligned}$$

である．2 つ目は Shoenfield 絶対性，3 つ目は $\mathbb{B}\Vdash\varphi(\dot{r})\leftrightarrow\dot{r}\in\hat{c}$ であることと，x のランダム性を使った．4 つ目は Borel 関係の絶対性を使った．

ここで式 1 を使うと，ある測度 1 な集合の全ての元 x について，$x\in A\iff x\in\hat{c}$ なので，($V[G]$ の中で)

$$\mu(A\bigtriangleup\hat{c})=0$$

である． □

定理 4. $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はすべて Lebesgue 可測である．

証明. A を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合とする．c を補題 3 の Borel コードとする．すると $V^{\mathbb{A}}$ において, $0=\mu(A\bigtriangleup\hat{c})=\mu(A\setminus\hat{c})+\mu(\hat{c}\setminus A)$ である．

今，$A\setminus\hat{c}$ は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ である．すると $\mu(A\setminus\hat{c})=0$ という式は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ で書ける．実際，B を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合として，測度が $1/n$ 以下の開集合のコードたちの集合を G_n とおくと

$$\mu(B)=0\iff(\forall n\geq 1)(\exists a\in G_n)(B\subseteq\hat{a})$$

であり，この式の右辺は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ である (G_n という集合が Borel 集合なことに注意)．よって，Shoenfield 絶対性により，V でも $\mu(A\setminus\hat{c})=0$ である．

他方で，$V^{\mathbb{A}}$ で $\mu(\hat{c}\setminus A)=0$ だが $\hat{c}\setminus A$ が $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合なので，$\mu(\hat{c}\setminus A)=0$ は $\mathbf{\Pi}^1_3$ 式で書ける．実際，補題 2 より，

$$(\forall B\in\mathbb{B})(\exists C\in\mathbb{B})(C\leq B\land C\cap(\hat{c}\setminus A)=\varnothing)$$

を考えればよいが，$\mathbb{B}$ の元を渡る量化を Borel コードを渡る量化と見て，閉集合の測度は Borel に計算できるだとか，閉集合のコード同士の解釈したときの包含関係が Borel に計算できるといったことを使えば，この式は $\mathbf{\Pi}^1_3$ になっている．今，Shoenfield 絶対性より $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 関係は絶対的なので，$\mathbf{\Pi}^1_3$ 関係は下向きに絶対的である．よって，$V^{\mathbb{A}}$ で成り立つ $\mu(\hat{c}\setminus A)=0$ は V でも成り立つ．

以上より V でも $\mu(A\setminus\hat{c})=\mu(\hat{c}\setminus A)=0$ となる．よって，V で $\mu(A\bigtriangleup\hat{c})=0$ だから，A は Lebesgue 可測である． □

参考文献

[BJ95] Tomek Bartoszynski and Haim Judah. *Set Theory: on the structure of the real line.* CRC Press, 1995.

[Jec03] Thomas Jech. *Set theory.* Vol. 14. Springer, 2003.

[Kan08] Akihiro Kanamori. *The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings.* Springer Science & Business Media, 2008.

[Kho11] Yurii Khomskii. *Regularity Properties and Definability in the Real Number Continuum: idealized forcing, polarized partitions, Hausdorff gaps and mad families in the projective hierarchy.* University of Amsterdam, 2011.