null イデアル上の閉包作用素で値域が Borel 集合族に含まれるものの存在の独立性

でぃぐ

2022 年 12 月 10 日

本稿では測度といったら常に Lebesgue 測度を指し，測度 0 集合の全体のなす集合を null で表す．

測度 0 集合 A が与えられたら，Borel な測度 0 集合 B をとることができて，$A \subseteq B$ を満たす，というのはよく知られた事実である．この事実と選択公理を使えば $F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null}$ で次を満たすものがある，ということができる．

(1) $A \in \mathsf{null}$ のとき $F(A)$ は Borel 集合
(2) $A \in \mathsf{null}$ のとき $A \subseteq F(A)$

しかし，この F は必ずしも次の意味の単調性を満たすとは限らない：

(3) $A, B \in \mathsf{null}$ かつ $A \subseteq B$ ならば $F(A) \subseteq F(B)$

上の (1)-(3) を満たす F が存在すれば便利だと思われるが，存在を証明できるだろうか？ 答えは No である．実際に，次が成り立つ．

定理 1. 次の命題は ZFC 上独立である：$F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null}$ が存在して，次の 3 条件を満たす．

(1) $A \in \mathsf{null}$ のとき $F(A)$ は Borel 集合
(2) $A \in \mathsf{null}$ のとき $A \subseteq F(A)$
(3) $A, B \in \mathsf{null}$ かつ $A \subseteq B$ ならば $F(A) \subseteq F(B)$

本稿ではこの定理を証明する．

命題 2. $\mathrm{add}(\mathsf{null}) = \mathrm{cof}(\mathsf{null})$ ならば定理 1 の 3 条件を満たす $F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null}$ は存在する．特に連続体仮説のもとで定理 1 の 3 条件を満たす $F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null}$ は存在する．

証明. 定義を思い出すと，

$$\mathrm{add}(\mathsf{null}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathsf{null}, \bigcup \mathcal{F} \notin \mathsf{null}\}$$
$$\mathrm{cof}(\mathsf{null}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathsf{null}, (\forall A \in \mathsf{null})(\exists B \in \mathcal{F})(A \subseteq B)\}$$

だった．$\mathrm{add}(\mathsf{null}) = \mathrm{cof}(\mathsf{null})$ のもとで単調増加かつ null の中で共終な Borel 集合の列が存在する．実際，$\mathrm{cof}(\mathsf{null})$ の witness $\langle A_\alpha : \alpha < \mathrm{cof}(\mathsf{null})\rangle$ をとり，

$$B_\alpha \supseteq \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta \cup \bigcup_{\beta\leq\alpha} A_\alpha$$

なる Borel 集合 B_α を $\alpha < \mathrm{cof}(\mathsf{null})$ に関する再帰でとれば，これが単調増加かつ null の中で共終な Borel 集合の列である．ここで上記の式の右辺は $\alpha < \mathrm{cof}(\mathsf{null}) = \mathrm{add}(\mathsf{null})$ より，測度 0 なことに注意する．

ここで $F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null}$ を

$$F(A) = B_\alpha,\ \text{ただし } \alpha \text{ は } A \subseteq B_\alpha \text{ となる最小の } \alpha$$

と定めればこれが目的のものとなる． □

命題 3. 連続体仮説を仮定する．このとき

$$\mathbb{C}_{\omega_2} \Vdash \text{“定理 1 の 3 条件を満たす } F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null} \text{ は存在しない”}.$$

ここで $\mathbb{C}_{\omega_2}$ は ω_2 個の Cohen 実数を加える強制法である．

証明. $(V, \mathbb{C}_{\omega_2})$ ジェネリックフィルター G をとる．$V[G]$ で定理 1 の 3 条件を満たす $F\colon \mathsf{null} \to \mathsf{null}$ が存在すると仮定する．次の事実を使う：

$$\mathbb{C} \Vdash \text{“} V \cap \mathbb{R} \text{ は測度 0 である”}$$

すると，$V[G]$ において，$\langle V[G_\alpha] \cap \mathbb{R} : \alpha < \omega_2 \rangle$ は測度 0 集合の列であることがわかる．ここで G_α は G を最初の α 個に制限して得られるジェネリックフィルターである．また，明らかに $\langle V[G_\alpha] \cap \mathbb{R} : \alpha < \omega_2 \rangle$ は単調増加な列である．よって, F の仮定から, $\langle F(V[G_\alpha] \cap \mathbb{R}) : \alpha < \omega_2 \rangle$ は測度 0 な Borel 集合の単調増加な列である．しかも，$\bigcup_{\alpha<\omega_2}(V[G_\alpha] \cap \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ より $\bigcup_{\alpha<\omega_2} F(V[G_\alpha] \cap \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ なので，この Borel 集合の列が途中で停留することはない．そこで部分列をとることにより，真に単調増加な Borel 集合の ω_2 列が存在することとなる．

実は，$V[G]$ には実際にはこのような列は存在しないことを示すことができる．

主張: V で連続体仮説を仮定したとき，

$$\mathbb{C}_{\omega_2} \Vdash \text{“長さ } \omega_2 \text{ の Borel 集合の真に単調増加な列は存在しない”}.$$

主張の証明: Borel コードの良い $\mathbb{C}_{\omega_2}$ 名前の列 $\langle \dot{c}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ と条件 $p \in \mathbb{C}_{\omega_2}$ が与えられて，

$$p \Vdash \text{“} \langle \dot{c}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle \text{ は真に単調増加”}$$

だと仮定する．

良い名前 $\dot{c}_\alpha$ が依存する添字の集合を $I_\alpha \subseteq \omega_2$ とする．すなわち，$\dot{c}_\alpha$ は長さ ω の $\mathbb{C}_{\omega_2}$ の反鎖の列であるから，各反鎖の元のサポートを考え，その和集合を考えたものである．$\mathbb{C}_{\omega_2}$ が可算鎖条件を満たすので $|I_\alpha| = \aleph_0$ である．今，連続体仮説を仮定していることから，列 $\langle I_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ にデルタシステム補題を適用できる．すなわち，$A \in [\omega_2]^{\aleph_2}$ と $R \in [\omega_2]^{\aleph_0}$ が存在して

$$(\forall \alpha, \beta \in A)(\alpha \neq \beta \to I_\alpha \cap I_\beta = R)$$

を満たす．また各 $I_\alpha \setminus R$ $(\alpha \in A)$ は同じ順序型を持つと仮定してよい．そこで $\alpha, \beta \in A$ に対して，一意に順序を保つ全単射 $\pi_{\alpha,\beta}\colon I_\beta \to I_\alpha$ であって，R 上定数関数なものがある．この添字の置換から定まる $\mathbb{C}_{\omega_2}$ 上の同型も同じ記号 $\pi_{\alpha,\beta}$ で表し，またそれから引き起こされる名前から名前への写像も同じ記号で表す．

$\alpha_0 \in A$ を一つ固定する．このとき $A' \in [A]^{\aleph_2}$ があって，すべての $\beta \in A'$ で $\pi_{\alpha_0,\beta}(\dot{c}_\beta)$ が名前として一定である．実際，I_{α_0} にのみ依存する良い名前は連続体仮説より $\aleph_1$ 個しかないので，鳩の巣原理よりこれがわかる．

そこで β, γ を A' から取り, $\beta < \gamma$ であり, また, $(I_\beta \setminus R) \cap \mathrm{dom}(p) = \varnothing, (I_\gamma \setminus R) \cap \mathrm{dom}(p) = \varnothing$ なようにする．今，最初の仮定より

$$p \Vdash \hat{\dot{c}}_\beta \subsetneq \hat{\dot{c}}_\gamma$$

である (ハット記号は Borel コードの解釈を表す).

この強制関係を同型 $\pi_{\beta,\gamma}$ で動かすと

$$\pi_{\beta,\gamma}(p) \Vdash \hat{\dot{c}}_\gamma \subsetneq \hat{\dot{c}}_\beta$$

を得る．しかし $p = \pi_{\beta,\gamma}(p)$ を考えるとこれは矛盾である． //

この主張によりこの命題も示された． □