Random and Cohen Reals ゼミ 第 1 回

後藤 達哉

2020/3/4

目的

Cohen forcing と Random forcing の基本的性質を二つが共通に持つ性質から導く．

Cohen forcing $\mathrm{Fn}(I,2)$ は $\mathrm{Borel}(2^I)/\mathrm{meager}$ と強制同値である．Random forcing は meager イデアルを null イデアルに取り換えた $\mathrm{Baire}(2^I)/\mathrm{null}$ である．

どちらも CH を破ることができるが，分離できる Cardinal Invariant が異なる．

	Cohen	Random
add(null)	$\aleph_1$	$\aleph_1$
cov(null)	$\aleph_1$	$\mathfrak{c}$
non(null)	$\mathfrak{c}$	$\aleph_1$
cof(null)	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
add(meager)	$\aleph_1$	$\aleph_1$
cov(meager)	$\mathfrak{c}$	$\aleph_1$
non(meager)	$\aleph_1$	$\mathfrak{c}$
cof(meager)	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$

(Handbook of Set Theory の Blass の章 [1] より引用)

Lemma 1.10.

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathrm{Fn}(I,2) & \longrightarrow & \mathrm{Borel}(2^I)/\mathrm{meager} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & p & \longmapsto & [\{f \in 2^I : p \subseteq f\}] \end{array}$$

は稠密埋め込み．

証明．$\mathbb{1}$ $(\varnothing)$ を $\mathbb{1}$ $([2^I])$ に写すこと，順序保存は明らか．

$p,q \in \mathrm{Fn}(I,2), p \perp q \to i(p) \perp i(q)$ について．$i(p) \perp i(q)$ は書き直すと

$$\{f \in 2^I : p \subseteq f\} \cap \{f \in 2^I : q \subseteq f\} \in \mathrm{meager}$$

ということである．ところが

$$(\text{左辺}) = \{f \in 2^I : p \cup q \subseteq f\} = \varnothing$$

なので成り立つ．

$\mathrm{ran}\, i$ が $\mathrm{Borel}(2^I)/\mathrm{meager}$ で稠密なこと．次の事実を使う．

事実． X を位相空間とする．ある開集合 U と mod meager で等しくなる集合は Baire の性質を持つという．Borel 集合はすべて Baire の性質を持つ．

略証．Baire の性質を持つ集合全体が開集合全体を含み，σ 代数をなすことを言えばよい． //

$A \in \mathrm{Borel}(2^I)$ で A は nonmeager とする．示すべきは，$\exists p \in \mathrm{Fn}(I,2), i(p) \leqslant [A]$．$A$ は Baire の性質を持つのである開集合 U があり，$[A] = [U]$．U は非空開集合だから $p \in \mathrm{Fn}(I,2)$ がとれて，$\{f \in 2^I : p \subseteq f\} \subseteq U$．よって，$i(p) \leqslant [U] = [A]$． □

補題の証明は $\mathrm{Borel}(2^I)$ ではなく $\mathrm{Baire}(2^I)$ = (clopen 集合で生成される σ 代数) で行っても通る．よって以下の 3 つは強制同値.

- $\mathrm{Fn}(I,2)$
- $\mathrm{Borel}(2^I)/\mathrm{meager}$
- $\mathrm{Baire}(2^I)/\mathrm{meager}$

2^I の位相

I を集合とし，$2^I = \{f : f : I \to 2\}$ とおく．2^I に直積位相を入れる．これは次を開基とする位相である:

$$N_s = \{f \in 2^I : s \subseteq f\}$$

ただし $s : I \rightharpoonup 2$ は有限部分関数.

N_s は clopen なことに注意．2^I の Baire 集合とは clopen 集合全体で生成される σ 代数の元のこと．上の N_s たちで生成される σ 代数でもある (コンパクト性よりわかる).

I が可算なら

$$\mathrm{Baire}(2^I) = \mathrm{Borel}(2^I).$$

I が非可算なら

$$\mathrm{Baire}(2^I) \subsetneq \mathrm{Borel}(2^I).$$

これを確かめよう．$A \subseteq 2^I$ と $J \subseteq I$ について A が J シリンダーであるとは，

$$\forall x,y \in 2^I, [x \restriction J = y \restriction J \to [x \in A \iff y \in A]]$$

を満たすこととする．

$\mathcal{A} = \{A \subseteq 2^I : \exists J \subseteq I$ 可算，　A は J シリンダー $\}$ とおくと $\mathcal{A}$ は $\mathrm{Baire}(2^I)$ を含む σ 代数．2^I の一点集合は Borel だが $\mathcal{A}$ に属さない．特に Baire でない．

2^I の測度

まず $2 = \{0,1\}$ には $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2$ の測度を入れる．2 を有限個直積した空間には 2 の測度を直積した測度を入れる．

I が無限集合のときの 2^I の測度の入れ方を述べよう．まず 2^I の clopen 集合全体に測度を入れる．それを Baire 集合族上の測度に拡張し完備化する．

つまり，A が clopen 集合なら有限な $J \subseteq I$ があって，A は J シリンダー．そこで 2^J の測度を使って

$$\mu(A) = \mu_{2^J}(A \upharpoonright J)$$

と定める．

Definition 1.1. 2^I 上のイデアル $\mathscr{I}$ が Baire supported とは次を満たすこととする:

$$\forall X \in \mathscr{I}, \exists Y \in \mathscr{I}, X \subseteq Y \wedge Y \in \mathrm{Baire}(2^I).$$

命題. meager イデアル，null イデアルは Baire supported である．

証明. $A \subseteq 2^I$ が零集合だったら，完備化の定義より $B \in \mathrm{Baire}(2^I)$ がとれて，$A \subseteq B$ かつ B は零集合となる．よって，null イデアルは Baire supported である．

meager イデアルが Baire supported なことは 2^I が ccc なことを使う．

補題 1. X を位相空間とするとき次は同値．

1. X は ccc.
2. X の任意の非空開集合の族 $\mathcal{U}$ に対し，可算な $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ が存在し，$\bigcup \mathcal{U} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$.

証明. この補題は Dan Ma [2] による．

(2) の否定を仮定する．すなわち，ある非空開集合の族 $\mathcal{U}$ があって，どんな可算な $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ についても $\bigcup \mathcal{U} \backslash \overline{\bigcup \mathcal{V}} \neq \varnothing$ とする．

超限再帰で $\mathcal{U}$ の点列 $(x_\alpha : \alpha < \omega_1)$ と $\mathcal{U}$ の元の列 $(U_\alpha : \alpha < \omega_1)$ を構成し，任意の $\alpha < \omega_1$ について $x_\alpha \in U_\alpha \backslash \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta}$ となるようにする．α 未満のすべての番号 β について x_β, U_β が構成できて，任意の $\beta < \alpha$ について $x_\beta \notin \overline{\bigcup_{\gamma<\beta} U_\gamma}$ かつ $x_\beta \in U_\beta$ とする．このとき $x_\alpha \in \bigcup \mathcal{U} \backslash \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta}$ をとる．そして，$x_\alpha \in U_\alpha$ となる $U_\alpha \in \mathcal{U}$ をとる．これで構成できた．

各 $\alpha < \omega_1$ に対して $W_\alpha = U_\alpha \backslash \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta}$ とおくと，W_α たちは disjoint な ω_1 個の非空開集合である．よって X が ccc でない．つまり (1) の否定が言えた．

逆に X が ccc でないとして，$\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ が互いに素な非空開集合の族とする．可算な $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ を考える．$W_\alpha \in \mathcal{W} \backslash \mathcal{V}$ をとると，$W_\alpha \cap \bigcup \mathcal{V} = \varnothing$. よって，$W_\alpha \cap \overline{\bigcup \mathcal{V}} = \varnothing$. これは $\bigcup \mathcal{W} \nsubseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$ を含意する． //

補題 2. 2^I において，任意の稠密開集合 D に対して，clopen 集合の可算和で書ける稠密集合 H で $H \subseteq D$ なるものがある．

証明. D を稠密開集合とする．$\mathcal{U} = \{H \subseteq D : H \text{ is clopen}\}$ とおく．すると補題 1 より $\{H_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ が存在して，$\bigcup \mathcal{U} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in\omega} H_i}$. ここで $H_i \subseteq D$ (for all i) より $\bigcup_{i\in\omega} H_i \subseteq D$. D が開集合なことから $\bigcup \mathcal{U} = D$ なので，$D \subseteq \overline{\bigcup_{i\in\omega} H_i}$. D が稠密なので，これは $\bigcup_{i\in\omega} H_i$ の稠密性を含意する．以上より $\bigcup_{i\in\omega} H_i$ が求めるべき集合である． //

M を meager 集合とし，$M = \bigcup_{i\in\omega} M_i$, 各 M_i は nowhere dense とする．$D_i = \overline{M_i}^c$ とおくと D_i は稠密開集合．よって補題 2 より clopen 集合の列 H_{ij} があって，$\bigcup_{j\in\omega} H_{ij} \subseteq D_i$ かつ $\bigcup_{j\in\omega} H_{ij}$ は稠密．そこで補集合をとり，$M_i \subseteq \overline{M_i} \subseteq \bigcap_{j\in\omega} H_{ij}^c$. ここで $\bigcap_{j\in\omega} H_{ij}^c$ は nowhere dense である．今和集合をとると，$M = \bigcup_{i\in\omega} M_i \subseteq \bigcup_{i\in\omega} \bigcap_{j\in\omega} H_{ij}^c$. 右辺は meager な Baire 集合である． □

Definition 1.2. $\Delta : I \to J$ のとき $\Delta^* : 2^J \to 2^I, \Delta_* : \mathcal{P}(2^I) \to \mathcal{P}(2^J)$ を次で定める．

$$\Delta^*(f) = f \circ \Delta,$$
$$\Delta_*(X) = (\Delta^*)^{-1}(X).$$

我々のすべての応用において Δ は単射であり，したがって Δ^* は全射, Δ_* は単射である．Δ^* は連続なので $X \in \mathrm{Baire}(2^I)$ ならば $\Delta_*(X) \in \mathrm{Baire}(2^J)$ である．

$\Delta : I \to J$ 全単射なら Δ を I と J の同一視と考えられる．Δ^* と Δ_* はそこから誘導される同一視である．

$I \subseteq J$ で $\Delta : I \to J$ が包含写像なら，$\Delta^*(f) = f \upharpoonright I$ である．$K = J \backslash I$ とおき，2^J を $2^I \times 2^K$ と同一視すれば Δ^* は 2^I への射影である．

null イデアルのようなイデアルの添え字不変性を表現するアプローチは関手の言葉を使うことである．すなわち各 I についてイデアル $\mathscr{I}(I)$ on 2^I が定められていて，$\Delta : I \to J$ 単射かつ $X \subseteq 2^I$ なら $X \in \mathscr{I}(I) \iff \Delta_*(X) \in \mathscr{I}(J)$ をみたすものと定めたい．しかし，Baire supported ならそれは $\mathscr{I}(\omega)$ で完全に決まるし，また真クラスとなる関手より集合 $\mathscr{I}(\omega)$ で表現する方が集合論的にシンプルなのでこれを採用する．

Definition 1.3. $\mathscr{I}$ を 2^ω 上のイデアルとする．$\mathscr{I}$ が**添え字不変**であるとは

$$\forall \Delta : \omega \to \omega \text{ 単射}, \forall X \subseteq 2^\omega, (X \in \mathscr{I} \iff \Delta_*(X) \in \mathscr{I})$$

を満たすことと定める．

Definition 1.4. $\mathscr{I} \subseteq \mathcal{P}(2^\omega)$ に対して，

$$\mathscr{I}(I) = \{X \in \mathcal{P}(2^I) : \exists \Delta : \omega \to I \text{ 単射}, \exists Y \in \mathscr{I}, X \subseteq \Delta_*(Y)\}$$

とおく．

Lemma 1.5. $\mathscr{I}$ を 2^ω 上の添え字不変イデアルとし，I を無限集合とする．このとき，

(a) $\mathscr{I}(\omega) = \mathscr{I}$.
(b) $\mathscr{I}(I)$ は 2^I 上のイデアル．
(c) I が σ イデアルなら $\mathscr{I}(I)$ もそう．

(d) $\Gamma : I \to J$ 単射と $X \subseteq 2^I$ について，$X \in \mathscr{I}(I) \iff \Gamma_*(X) \in \mathscr{I}(J)$.

証明. (a) は容易.

(b) について．$\mathscr{I}(I)$ が下に閉じていて，$\varnothing$ を含んでいるのは明らか.

$2^I \in \mathscr{I}(I)$ とすれば $\Delta : \omega \to I$ 単射と $Y \in \mathscr{I}$ があって $2^I = \Delta_*(Y)$. ところが，$2^I = \Delta_*(2^\omega)$ なので，Δ_* の単射性より $Y = 2^\omega$．よって $Y \in \mathscr{I}$ となって矛盾．ゆえに $2^I \notin \mathscr{I}(I)$.

二個の和集合で閉じることの証明は次の可算和で閉じることの証明と同様なので省略する.

(c) について．$X_n \in \mathscr{I}(I)$ (for $n \in \omega$) とする．$Y_n \in \mathscr{I}, \Delta_n : \omega \to I$ 単射で $X_n \subseteq (\Delta_n)_*(Y_n)$ なるものをとる.

$\Gamma : \omega \to I$ 単射ですべての $n \in \omega$ で $\mathrm{ran}(\Delta_n) \subseteq \mathrm{ran}(\Gamma)$ となるものをとる．今，$\Sigma_n : \omega \to \omega$ 単射を $\Gamma \circ \Sigma_n = \Delta_n$ をみたすものでとる.

すると各 $n \in \omega$ について，$Z_n = (\Sigma_n)_*(Y_n)$ とおくと，

$$X_n \subseteq (\Delta_n)_*(Y_n) = \Gamma_*(\Sigma_n)_*(Y_n) = \Gamma_*(Z_n).$$

$\mathscr{I}$ は添え字不変なので各 Z_n は $\mathscr{I}$ に属する．よって $\mathscr{I}$ の σ 加法性より $\bigcup_{n\in\omega} Z_n \in \mathscr{I}$. すると，

$$\bigcup_{n\in\omega} X_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_*(Z_n) = \Gamma_*(\bigcup_{n\in\omega} Z_n) \in \mathscr{I}(I).$$

(d) について．$\Gamma : I \to J$ 単射，$X \subseteq 2^I$ とする．もし $X \in \mathscr{I}(I)$ なら $Y \in \mathscr{I}$ と $\Delta : \omega \to I$ 単射で $X \subseteq \Delta_*(Y)$ なものをとる．すると，$\Gamma_*(X) \subseteq (\Gamma \circ \Delta)_*(Y)$ なので，$\Gamma_*(X) \in \mathscr{I}(J)$.

逆に $\Gamma_*(X) \in \mathscr{I}(J)$ とすると $\Delta : \omega \to J$ 単射と $Y \in \mathscr{I}$ がとれて，$\Gamma_*(X) \subseteq \Delta_*(Y)$．$\Sigma : \omega \to I$ 単射を，$k \in \omega$ が $\Delta(k) \in \mathrm{ran}(\Gamma)$ をみたすとき，$\Gamma(\Sigma(k)) = \Delta(k)$ を満たすようにとる (これはとれる).

このとき $X \subseteq \Sigma_*(Y)$ である．実際，$f \in X$ とする．$f' \in 2^J$ を次で定める.

$$f'(j) = \begin{cases} f(i) & (\text{if } j = \Gamma(i)) \\ f(\Sigma(k)) & (\text{if } j = \Delta(k)) \\ 0 & (\text{if } j \notin \mathrm{ran}(\Gamma) \cup \mathrm{ran}(\Delta)) \end{cases}$$

Σ の定め方よりこれは well-defined な写像になっていて，しかも $f' \in \Gamma_*(X)$ である．よって，$f' \in \Delta_*(Y)$. つまり，$f' \circ \Delta \in Y$. ところが，$f' \circ \Delta = f \circ \Sigma$. よって $f \circ \Sigma \in Y$ なので $f \in \Sigma_*(Y)$．よって $X \subseteq \Sigma_*(Y)$ が示せた．したがって $X \in \mathscr{I}(I)$. □

命題 3. 2^ω 上の null, meager イデアルを null, meager と書き，2^I 上の null, meager イデアルを $\mathrm{null}_{2^I}, \mathrm{meager}_{2^I}$ と書く.

1. null, meager は添え字不変イデアル.
2. $\mathrm{null}_{2^I} = \mathrm{null}(I), \mathrm{meager}_{2^I} = \mathrm{meager}(I)$.

証明. null イデアルについて考える．まず，次が成り立つことに注意する．可算集合 I と集合 J で $I \cap J = \varnothing$ なものと可測集合 $A \subseteq 2^I$ について

$$A \in \mathrm{null}_{2^I} \iff A \times 2^J \in \mathrm{null}_{2^{I\cup J}}. \qquad (*)$$

これは $2^{I\cup J}$ の測度が 2^I の測度と 2^J の測度の直積測度と一致することからわかる.

$(*)$ より null が添え字不変であることと任意の無限集合 I について $\mathrm{null}(I) \subseteq \mathrm{null}_{2^I}$ が分かる．null_{2^I} が Baire supported なことを合わせて考えれば，$\mathrm{null}_{2^I} \subseteq \mathrm{null}(I)$ もわかる.

meager イデアルについても $(*)$ と同様のことが言えればよい．このうち，$A \in \mathrm{meager}_{2^I} \Longrightarrow A \times 2^J \in \mathrm{meager}_{2^{I\cup J}}$ は明らかである．逆を示すのは次以降の命題に任せる. □

命題 (Kuratowski–Ulam)**.** X, Y を位相空間で Y は第二可算とする．$E \subseteq X \times Y$ が nowhere dense な部分集合なら，meager の意味でほとんどすべての $x \in X$ で E_x が nowhere dense 集合である．ただし $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$.

また，$E \subseteq X \times Y$ が meager な部分集合なら，meager の意味でほとんどすべての $x \in X$ で E_x が meager 集合である.

証明. 前半の主張を示せば後半が従うのは明らか．よって前半の主張を示す．E は閉集合と仮定してもよい.

$\{V_n\}_{n\in\omega}$ を Y の開基とする．$G = (X \times Y) - E$ とおくと，G は稠密開集合である．各自然数 n について

$$G_n = \{x \in X : \exists y \in V_n, (x, y) \in G\}$$

とおく.

G_n が開集合であることを示す．$x \in G_n$ とし，$y \in V_n$ で $(x, y) \in G$ なるものをとる．G が開集合なので開集合 $U \subseteq X, V \subseteq Y$ があり，$x \in U, y \in V \subseteq V_n, U \times V \subseteq G$. すると $U \subseteq G_n$．したがって G_n は開集合である.

G_n が稠密であることを示す．$U \subseteq X$ を非空開集合とする．G が稠密なので $G \cap (U \times V_n)$ は非空である．よって G_n は U と交わる．よって G_n は稠密.

以上より，$\bigcap_n G_n$ は X の comeager 集合である.

任意の $x \in \bigcap_n G_n$ について，セクション G_x は任意の n について V_n の点を持つ．$\{V_n\}_{n\in\omega}$ が Y の開基だったので，これは G_x が Y の稠密開集合であることを意味する．よって $E_x = Y \backslash G_x$ は nowhere dense.

以上より comeager 集合 $\bigcap_n G_n$ の任意の点 x について E_x は nowhere dense である. □

系. X, Y を位相空間で，Y は第二可算であるとする．$X \times Y$ の部分集合 $A \times B$ が meager ならば $A \subseteq X$ または $B \subseteq Y$ が meager.

証明. $A \times B$ が meager かつ A が nonmeager だとする．する

とほとんどすべての $x \in X$ で $(A \times B)_x$ が meager．すると，A が nonmeager なので，ある $x \in A$ があって，$(A \times B)_x$ が meager．$x \in A$ より $(A \times B)_x = B$ なので B が meager である． □

空間 2^J において全体集合は meager でない (コンパクトハウスドルフ空間に対する Baire の範疇定理より)．そこで系より次が従う．

可算集合 I と集合 J で $I \cap J = \varnothing$ なものと部分集合 $A \subseteq 2^I$ について

$$A \in \mathrm{meager}_{2^I} \iff A \times 2^J \in \mathrm{meager}_{2^{I \cup J}}. \tag{1}$$

これで命題 3 が示された．

Definition 1.6. $2 = \{0, 1\}$ に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の加法を入れ，2^I に座標ごとの加法を入れる．そして $f \in 2^I$ と $X \subseteq 2^I$ に対して

$$f + X = \{f + g : g \in X\}$$

とおく．2^I 上のイデアル $\mathscr{I}$ が **0-1 不変**であるとはどんな $f \in 2^I$ と $X \in \mathscr{I}$ についても $f + X \in \mathscr{I}$ となることを言う．

null イデアルと meager イデアルは明らかに 0-1 不変である．

Lemma 1.7. $\mathscr{I}$ が添え字不変かつ 0-1 不変な 2^ω 上のイデアルならば，どんな無限集合 I についても $\mathscr{I}(I)$ は 0-1 不変．

証明． $f \in 2^I$，$X \in \mathscr{I}(I)$ とする．すると $\Delta : \omega \to I$ 単射と $Y \in \mathscr{I}$ があって $X \subseteq \Delta_*(Y)$．このとき $f' = \Delta^*(f)$ とおくと $f + X \subseteq \Delta_*(f' + Y)$．$\mathscr{I}$ が 0-1 不変なので $f' + Y \in \mathscr{I}$．よって $f + X \in \mathscr{I}(I)$． □

Definition 1.8. $\mathscr{I}$ を 2^ω 上の添え字不変イデアルとする．無限集合 I について次の poset を定義する．

- $\mathbb{P}(\mathscr{I}, I) = \{B \in \mathrm{Baire}(2^I) : B \notin \mathscr{I}(I)\}$.
- $\mathbb{B}(\mathscr{I}, I) = \mathrm{Baire}(2^I)/\mathscr{I}(I)$.

Lemma 1.9. $i : \mathbb{P}(\mathscr{I}, I) \to \mathbb{B}(\mathscr{I}, I) \setminus \{0\}$ を同値類への射影とすると，これは稠密埋め込み． □

Definition 1.11. ccc イデアルとは添え字不変イデアル $\mathscr{I}$ on 2^ω であって，任意の無限集合 I に対して $\mathbb{P}(\mathscr{I}, I)$ が ccc であるもののこと．

命題. null イデアル，meager イデアルは ccc イデアルである．

証明． Δ システム補題を使った証明より $\mathrm{Fn}(I, 2)$ が ccc であることは既知とする．よって meager イデアルは ccc イデアルである．

null イデアルが ccc なことは次の補題より従う．

補題. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ を確率空間とする．$T \subseteq \mathcal{S}$ が非可算で T の元はすべて測度正とする．このとき異なる $A, B \in T$ があって $\mu(A \cap B) > 0$.

証明． $T_n = \{A \in T : \mu(A) > 1/n\}$ とおくと $T = \bigcup_n T_n$．よってある n が存在して T_n は非可算である．すべての相異なる $A, B \in T$ に対して $\mu(A \cap B) = 0$ と仮定する．T_n から相異なる n 個の元 $A_1, \ldots, A_n$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}
\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots \\
&= \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) \\
&> (1/n) \cdot n = 1 = \mu(X)
\end{aligned}$$

矛盾． //

□

補題. 添え字不変イデアル $\mathscr{I}$ on 2^ω が ccc イデアルであるためには，$\mathbb{P}(\mathscr{I}, \omega_1)$ が ccc であることが必要十分．

証明． $\mathrm{Baire}(2^I)$ の ω_1 個の元 $(X_\alpha : \alpha < \omega_1)$ を考える．各 X_α は Baire 集合なのでサイズ ω_1 以下の添え字の集合 $J \subseteq I$ があって X_α たちはすべて J シリンダーである．$i : J \to I$ を包含写像とする．$X_\alpha = i_*(Y_\alpha)$ となる Baire 集合 $Y_\alpha \subseteq 2^J$ がとれる．また単射 $\Gamma : J \to \omega_1$ をとる．このとき添え字不変性より

$$\begin{aligned}
X_\alpha \in \mathscr{I}(I) &\iff \Gamma_*(Y_\alpha) \in \mathscr{I}(\omega_1) \\
X_\alpha \cap X_\beta \in \mathscr{I}(I) &\iff \Gamma_*(Y_\alpha) \cap \Gamma_*(Y_\beta) \in \mathscr{I}(\omega_1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\mathbb{P}(\mathscr{I}, \omega_1)$ が ccc なら $\mathbb{P}(\mathscr{I}, I)$ も ccc である． □

参考文献

[1] Andreas Blass. “Chapter 6 - Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum”. In: *Handbook of Set Theory*. Springer Netherlands, 2009, pp. 395–489.

[2] Dan Ma. *Another characterization about CCC spaces — Dan Ma's Topology Blog*. `https://dantopology.wordpress.com/2014/02/28/another-characterization-about-ccc-spaces/`.

[3] A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[4] Kenneth Kunen. “Chapter 20 - Random and Cohen Reals”. In: *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Ed. by Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan. Amsterdam: North-Holland, 1984, pp. 887–911.

[5] J.C. Oxtoby. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.