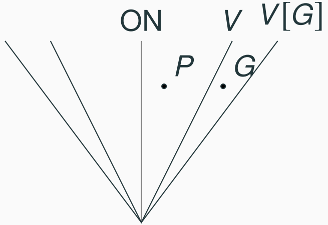
強制法および連続体仮説の独立性証明

後藤 達哉

2020 年 1 月 23 日

強制法

強制法とは集合論のモデル V に理想元 G を加えてより大きな集合論のモデル $V[G]$ を作る技法である．



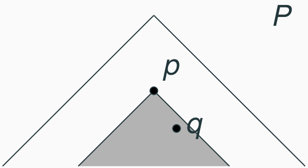
半順序集合 $(P, \leq)$ は理想元 G の部品となる元 p たちからなる．$q \leq p$ は部品 q が部品 p より情報量が多いと解釈する．

ジェネリックフィルター

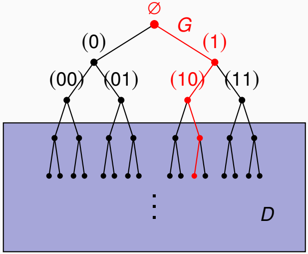
理想元 G とは正確にはジェネリックフィルターのことである．つまり，以下をみたす $(P, \leq)$ の部分集合である．

1. $q \in G, q \leq p \Rightarrow p \in G$.
2. $p, q \in G \Rightarrow \exists r \in G, r \leq p, q$.
3. $D \in V$ かつ $D \subset P$ が稠密集合ならば $D \cap G \neq \emptyset$.

ここに $D \subset P$ が稠密集合とは $\forall p \in P, \exists q \in D, q \leq p$ の意味．



$P = \{0,1\}^{<\omega}$



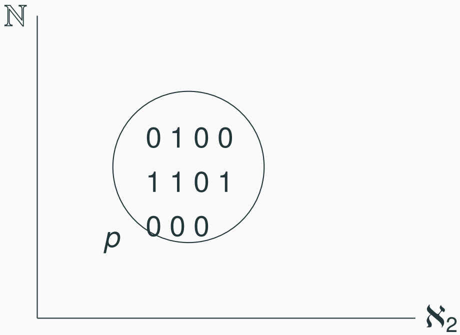
コーエン強制

強制法を使って，連続体仮説の否定，つまり $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ が成り立つモデルを得たい．

半順序集合は

$$P = \{p : p : \aleph_2 \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1\} \text{ かつ } p \text{ は有限 }\}$$

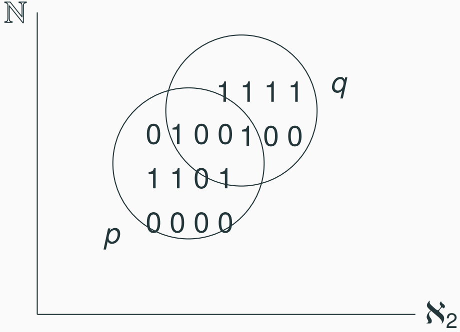
とする．順序 $q \leq p$ は $q \supset p$ で定義する．



主張: $g = \bigcup G : \aleph_2 \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1\}$

以後，この P に対するジェネリックフィルター G を固定する．

$g = \bigcup G$ とおくと，g は $\aleph_2 \times \mathbb{N}$ から $\{0, 1\}$ への部分関数となる．フィルターの貼り合わせ条件があるからである．

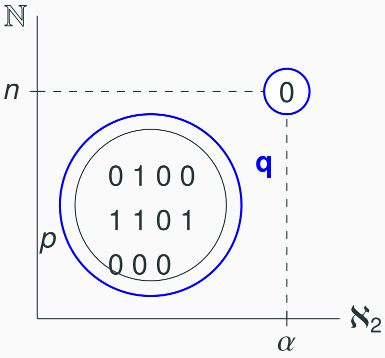


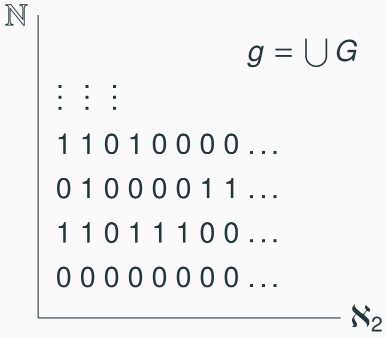
主張: $g = \bigcup G : \aleph_2 \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$

以下は V で定義できる P の稠密集合である:

$$D_{\alpha,n} = \{p \in P : (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\} \quad (\text{for } \alpha \in \aleph_2, n \in \mathbb{N})$$

よってジェネリック性より $D_{\alpha,n}$ と G は交わる．これより，$g = \bigcup G$ が $\aleph_2 \times \mathbb{N}$ から $\{0,1\}$ への全域関数なことが分かる．





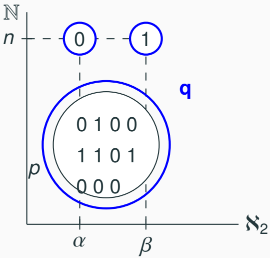
主張: 縦で切った切り口は互いに異なる

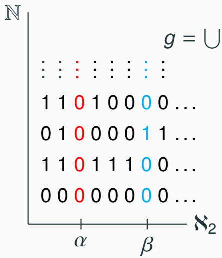
以下は V で定義できる P の稠密集合である:

$$E_{\alpha,\beta} = \{p \in P : \exists n \in \omega, p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$$

$$(\text{for } \alpha, \beta \in \aleph_2, \alpha \neq \beta)$$

よってジェネリック性より $E_{\alpha,\beta}$ と G は交わる．これより，実数 $x_\alpha : \omega \to \{0, 1\}$ を $x_\alpha(n) = g(\alpha, n)$ で定義すると $\alpha \neq \beta$ ならば $x_\alpha \neq x_\beta$.





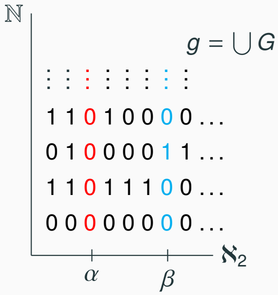
連続体仮説の否定の強制

したがって $V[G]$ の中では $(\aleph_2)^V = (\aleph_2)^{V[G]}$ 個の互いに異なる実数があるため

$$V[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$$

である．

なお，$(\aleph_2)^V = (\aleph_2)^{V[G]}$ が成り立つのは半順序集合 P が可算鎖条件を満たすことによる．



References

K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.