任意の集合が全順序付けできるが素イデアル定理が成り立たない ZFA のモデルの構成

でぃぐ (@fujidig)

2019 年 12 月 21 日

目次

1 本稿の流れ

ZF 上次の含意関係がある.

$$\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{BPI} \Rightarrow \mathrm{OE} \Rightarrow \mathrm{OP} \Rightarrow \mathrm{AC}^{\mathrm{fin}}$$

AC. 選択公理.

素イデアル定理 (BPI). 任意のブール代数は素イデアルを持つ.

コンパクト性定理 (BPI と同値). 一階述語論理の理論 T に対して，T の任意の有限部分集合がモデルを持てば T がモデルを持つ.

Order Extension Priniciple (OE). 任意の半順序集合は全順序に拡張できる.

Ordering Priniciple (OP). 任意の集合は全順序付けできる.

$\mathbf{AC}^{\mathbf{fin}}$. 非空な有限集合の族に対する選択公理.

$\mathbf{AC}^{\mathbf{fin}}_{\omega}$. 非空な有限集合の添え字集合が ω な族に対する選択公理.

2 含意の証明

2.1 AC ⇒ BPI

AC と Zorn の補題は同値だった．Zorn の補題を使った BPI の標準的な証明をすればよい． □

2.2 BPI ⇒ コンパクト性定理

Henkin 構成 (超冪による証明では AC を使ってしまうことに注意する). □

2.3 コンパクト性定理 ⇒ BPI

B をブール代数とする．各 $b \in B$ を定数記号として用意し，それに単項関係記号 I を加えた言語を L とする．L 理論 T を次の論理式たちの全体とする．

$$\begin{aligned}
&I(c) \to I(b) && (\text{all } b, c \in B \text{ with } b \leqslant c)\\
&(I(b) \wedge I(c)) \to I(b+c) && (\text{all } b, c \in B)\\
&I(b) \vee I(-b) && (\text{all } b \in B)
\end{aligned}$$

T の任意の有限部分集合はモデルを持つ．実際，T の有限部分集合 T' が与えられたとき，そこに現れる定数記号たちから生成されるブール代数を考える．それは有限集合である．それのフィルター全体も有限個であるので極大なものをとればよいからである．よって完全性定理より T もモデル M を持つ．M のうち定数記号の解釈だけを集めれば B と全単射の対応がつく．このとき M の I の解釈と B との共通部分は素イデアルである． □

2.4 コンパクト性定理 ⇒ OE

$(P,<)$ を半順序集合とする．各 $p \in P$ を定数記号として用意し，それに二項関係記号 $\prec$ を加えた言語を L とする．L 理論 T を次の論理式たちの全体とする．

$$
\begin{aligned}
&\neg(p \prec p) && (\text{all } p \in P)\\
&(p \prec q \wedge q \prec r) \to p \prec r && (\text{all } p,q,r \in P)\\
&p \prec q \vee q \prec p && (\text{all } p,q \in P \text{ with } p \neq q)\\
&p \prec q && (\text{all } p,q \in P \text{ with } p < q)
\end{aligned}
$$

有限半順序集合は全順序に拡張できるので，T の任意の有限部分集合はモデルを持つ．よって完全性定理より T もモデル M を持つ．M のうち定数記号の解釈だけを集めれば P と全単射の対応がつく．このとき M の $\prec$ の解釈の P への制限は P 上の全順序で $<$ を拡張したものになっている． □

2.5 OE ⇒ OP

空な関係を半順序だと思えば明らか． □

2.6 OP ⇒ $\mathrm{AC}^{\mathrm{fin}}$

有限集合の族 $(X_i)_{i\in I}$ が与えられたとする．和集合 $\bigcup_{i\in I} X_i$ を全順序付けする．すると各 X_i は有限集合なのでこの順序に関する最小元 x_i がとれる．$(x_i)_{i\in I}$ は $\prod_{i\in I} X_i$ の元である． □

3 ZFA と permutation model

3.1 ZFA の公理

通常の集合論 ZF(C) では要素を持たないオブジェクトは空集合ただ一つしかない．これを修正し，要素を持たないオブジェクト (アトム) を空集合以外にも許した公理系を ZFA という．

集合論の言語 $L = \{\in\}$ に定数記号 $0, A$ を加えた言語 $L' = \{\in, 0, A\}$ を ZFA の言語という．A はアトムの全体の集合を意味する．

ZFA の公理は基本的に ZF の公理に以下の公理を加えたものである．

$$
\begin{aligned}
&\neg\exists x(x \in 0) && \text{空集合の公理}\\
&(\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x \neq 0 \wedge \neg\exists y(y \in x)) && \text{アトムの公理}
\end{aligned}
$$

ただし ZF の公理の一部は次のように修正する．

$$
\begin{aligned}
&(\forall x\,\mathrm{set})(\forall y\,\mathrm{set})((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = z) && \text{外延性公理}\\
&(\forall x\,\mathrm{set} \neq 0)(\exists y \in x)(y \cap x = 0) && \text{基礎の公理}
\end{aligned}
$$

ただし $(\forall x\,\mathrm{set})$ は $(\forall x \notin A)$ の略記である．

事実． ZFC が無矛盾なら ZFA+AC+(A は可算無限) も無矛盾である． [TODO]

ZF のときと同様 ZFA の中で累積階層を定義できる．S を集合とする (ただし集合とはアトムでないオブジェクトのこと)．

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^0(S) &= S \\ \mathcal{P}^{\alpha+1}(S) &= \mathcal{P}^\alpha(S) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(S)) \\ \mathcal{P}^\alpha(S) &= \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}^\beta(S)\,(\alpha \text{ limit})\end{aligned}$$

そしてクラス $\mathcal{P}^\infty(S)$ を次で定義する．

$$\mathcal{P}^\infty(S) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathcal{P}^\alpha(S)$$

すると

$$\mathcal{P}^\infty(A) = V$$

が言える (V はすべてのオブジェクト全体のクラス)．

$\mathcal{P}^\infty(0)$ を kernel という．

3.2 Permutation model

$\mathrm{Aut}(A)$ を A から A への全単射全体のなす群とする．$\pi \in \mathrm{Aut}(A)$ を V から V への写像に拡大することができる．すなわちランクに関する再帰で

$$\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\}$$

と定める．

$G \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ を部分群とする．

各 $x \in V$ について

$$\mathrm{sym}_G(x) = \{\pi \in G : \pi x = x\}$$

とおく．

このとき G の部分群の集合 $\mathcal{F}$ が G の**ノーマルフィルター**であるとは次を満たすこととする．

1. $G \in \mathcal{F}$.
2. $H \in \mathcal{F}$ かつ $H \subseteq K$ かつ K が G の部分群ならば $K \in \mathcal{F}$.
3. $H, K \in \mathcal{F}$ ならば $H \cap K \in \mathcal{F}$.
4. $H \in \mathcal{F}$ かつ $\pi \in G$ ならば $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$.
5. 各 $a \in A$ について $\mathrm{sym}_G(a) \in \mathcal{F}$.

$G \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ とその上のノーマルフィルター $\mathcal{F}$ を固定する．$x \in V$ が **symmetric** とは $\mathrm{sym}_G(x) \in \mathcal{F}$ のこととする．

$\mathscr{V}$ を継承的に symmetric なオブジェクトの全体のクラスとする．すなわち

$$\mathscr{V} = \{x : x \subseteq \mathscr{V} \text{ かつ } x \text{ が symmetric}\}$$

と定義する．

$\mathscr{V}$ を permutation model という．

定理． $\mathscr{V}$ は ZFA の推移的モデルであって kernel を含み，$A \in \mathscr{V}$ である．[TODO]

3.3 A のノーマルイデアルから作られる permutation model

permutation model は多くの場合 A のノーマルイデアルから作られる．$G \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ を群とする．$I \subseteq \mathcal{P}(A)$ が A 上の**ノーマルイデアル**であるとは以下の 5 条件を満たすこと．

1. $0 \in I$.
2. $F \subseteq E \in I \Rightarrow F \in I$.
3. $E, F \in I \Rightarrow E \cup F \in I$.
4. $\pi \in G, E \in I \Rightarrow \pi“E \in I$.
5. $a \in A \Rightarrow \{a\} \in I$.

$\mathcal{F}$ を $\mathrm{fix}(E)$ for $E \in I$ から生成されるフィルターとする．すると $\mathcal{F}$ はノーマルフィルターとなり，permutation model $\mathscr{V}$ を定める．

このとき x が symmetric なのはある $E \in I$ があって

$$\mathrm{fix}(E) \subseteq \mathrm{sym}(x)$$

となるときである．これを満たす E を x の**サポート**という．

permutation model を作るときは常に ZFA+AC で作業する．

今 V の中でどんな元 x もある順序数との間の全単射 f がとれるが，特に x が kernel の元なら f も kernel の中にあるので，どの $x \in \mathcal{P}^\infty(0)$ も $\mathscr{V}$ で整列できる．よって次が言える．

$$x \in \mathscr{V} \text{ が整列可能 } \iff \exists y \in \mathcal{P}^\infty(0), \exists f, f : x \to y \text{ 単射}.$$

そのような f を考えると片側が kernel の元なので

$$\mathrm{sym}(f) = \mathrm{fix}(x)$$

である．よって

$$(\mathscr{V} \models x \text{ が整列可能 }) \iff \mathrm{fix}(x) \in \mathcal{F} \tag{$*$}$$

となる．実際，$\mathscr{V}$ において x が整列可能なら，$f \in \mathscr{V}$ と $y \in \mathcal{P}^\infty(0)$ がとれて $f : x \to y$ 全単射．$f \in \mathscr{V}$ より f は symmetric なので $\mathrm{sym}(f) \in \mathcal{F}$. ゆえに $\mathrm{fix}(x) \in \mathcal{F}$. 逆に $\mathrm{fix}(x) \in \mathcal{F}$ とする．V では AC は成り立つのだから $f : x \to \alpha$ 全単射 ($\alpha \in \mathrm{On}, f \in V$ がとれる．すると $\mathrm{sym}(f) = \mathrm{fix}(x) \in \mathcal{F}$ より f は symmetric．f の元が $\mathscr{V}$ の元なことはすぐ分かるので，$f \in \mathscr{V}$. よって x は $\mathscr{V}$ において整列可能.

3.4 The basic Fraenkel model

A を可算無限とする．$G = \mathrm{Aut}(A)$ とし，I を A のすべての有限部分集合の全体とする．明らかに I は A のノーマルイデアルであるので，G と I から得られる permutation model を $\mathscr{V}$ とする．

A のどんな有限部分集合 E についても $\pi \in \mathrm{fix}(E)$ で $\pi \notin \mathrm{fix}(A)$ なものを見つけられる．よって $\mathrm{fix}(A)$ は $\mathcal{F}$ に属さない．したがって $(*)$ より A は $\mathscr{V}$ に整列順序を持たない．ゆえに次が得られた．

定理 1. Con(ZF) のもとで，

$$\mathrm{ZFA} \not\models \mathrm{AC}.$$

3.5 The second Fraenkel model

A を可算無限とする．A を可算個の disjoint な組たちに分割する:

$$A = \bigcup_{n \in \omega} P_n, P_n = \{a_n, b_n\}, n \in \omega$$

$G \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ を組 P_n たちを保存する π 全体のなす部分群とする:

$$\pi(\{a_n, b_n\}) = \{a_n, b_n\}, n \in \omega.$$

I を A の有限集合全体のなすイデアルとする．G と I から得られる permutation model を $\mathscr{V}$ とする．

このとき次が成り立つ．

(1) 各 P_n は $\mathscr{V}$ に属する．
(2) $\langle P_n : n \in \omega \rangle \in \mathscr{V}$. よって $\{P_n : n \in \omega\}$ は $\mathscr{V}$ において可算.
(3) $f \in \mathscr{V}$ で $\mathrm{dom}\, f = \omega$ かつ $f(n) \in P_n$ なものはない．

(1), (2) は P_n たちがどの $\pi \in G$ でも不変なことから従う．(3) について．そのような f があったとして，E を f のサポートとする．$E = \{a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k\}$ の形と仮定してもよい．$\pi \in \mathrm{fix}\, E$ かつ a_{k+1} と b_{k+1} を互いに入れ替える $\pi \in G$ をとる．すると E が f のサポートなので $\pi f = f$．よって

$$\pi(f(k+1)) = (\pi f)(\pi(k+1)) = f(k+1)$$

だが,

$$\pi(f(k+1)) \neq f(k+1)$$

なので矛盾した．

したがって，次が得られた．

定理 2. ZF の無矛盾性を仮定する．このとき ZFA において二元集合の可算族に対する選択公理は証明できない．

3.6 The ordered Mostowski model

$\mathscr{V}$ を群 $G \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ とノーマルフィルター $\mathcal{F}$ によって与えられる permutation model とする．

$C \subseteq \mathscr{V}$ をクラスとする．C が symmetric であるとは，次の $\mathrm{sym}(C)$ が $\mathcal{F}$ に属することと定める:

$$\mathrm{sym}(C) = \{\pi \in G : \pi``C = C\}.$$

$C_\alpha = C \cap \mathcal{P}^\alpha(A)$ とおくと

$$\begin{aligned} C \text{ が symmetric } &\iff \forall \alpha, C_\alpha \in \mathscr{V} \\ &\iff \forall x \in \mathscr{V}, C \cap x \in \mathscr{V} \end{aligned}$$

が成り立つ．

補題 3. $\mathscr{V}$ を群 $G \subseteq \mathrm{Aut}(A)$ とノーマルイデアル I によって与えられる permutation model とする．このとき次のクラスは symmetric である:

$$C = \{(E, x) : E \in I, x \in \mathscr{V} \text{ かつ } E \text{ は } x \text{ のサポート }\}.$$

証明. $\pi \in G$ なら

$$\mathrm{fix}(\pi E) = \pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1}$$
$$\mathrm{sym}(\pi x) = \pi\,\mathrm{sym}(x)\pi^{-1}$$

が成り立つ．よって

$$E \text{ は } x \text{ のサポート} \iff \pi E \text{ は } \pi x \text{ のサポート}$$

が言える．これより補題が従う． □

A を可算無限とする．A 上の順序 $<$ で $\mathbb{Q}$ の順序と同型なものをとる．

$$G = \{\pi \in \mathrm{Aut}(A) : \pi \text{ は順序保存 }\}$$

とおき，I を A の有限部分集合全体とする．

$\mathscr{V}$ を G と I によって与えられる permutation model とする．

$\mathscr{V}$ は次を満たすことを示そう．

(1) A は $\mathscr{V}$ において整列できない．
(2) $\mathscr{V}$ の線型順序であるような symmetric クラスが存在する．

各有限な $E \subseteq A$ について $\mathrm{fix}\,E \nsubseteq \mathrm{fix}\,A$ は容易にわかる．よって (1) を得る．(2) を示すためにいくつかの補題を用意する．

補題 4. 1. E_1, E_2 がともに x のサポートならば，$E_1 \cap E_2$ も x のサポート．

2. 任意の symmetric な x は最小のサポートを持つ．クラス $C = \{(x, E) : E \text{ は } x \text{ の最小のサポート }\}$ は symmetric である．

証明. 1 について．これは次の事実より従う．E_1, E_2 が A の有限部分集合ならば，

$$\mathrm{fix}(E_1 \cap E_2) = [\mathrm{fix}(E_1) \cap \mathrm{fix}(E_2)].$$

ただし $[-]$ は生成される部分群を表す．この事実は A に $\mathbb{Q}$ の順序を入れていることから証明できる．

2 について．x のすべてのサポートの共通部分をとればよい．これが再びサポートになることは 1 よりわかる．後半の主張は，E が x の最小のサポートなら，$\pi(E)$ が $\pi(x)$ の最小のサポートになることからわかる． □

補題 5. 1. E が x のサポートかつ $\pi(E) = E$ ならば $\pi(x) = x$.

2. symmetric class F が存在して，$\mathscr{V}$ から $\mathrm{On} \times I$ への単射である．

証明. 1 について．$\pi \in G$ はすべて順序保存なので，$\pi(E) = E$ ならば E が有限集合なことから，$\forall a \in E, \pi(a) = a$．すなわち $\pi \in \mathrm{fix}(E)$.

2 について．$x \in \mathscr{V}$ について

$$\mathrm{orb}(x) = \{\pi(x) : \pi \in G\}$$

とおく．各 x について $\mathrm{sym}(\mathrm{orb}(x)) = G$ である．

したがって，orbit 全体を順序数で並べたら，その enumeration は symmetric クラスである．

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \mathrm{orb}(x) \text{ の上の enumeration による番号} \\ F_2(x) &= x \text{ の最小のサポート} \\ F(x) &= (F_1(x), F_2(x)) \end{aligned}$$

とおく．F は symmetric となる．

F が単射なことを示す．$F(x) = F(y)$ なら x と y は同じ orbit に乗っているので，$y = \pi(x) (\pi \in G)$．E を x の最小サポートとすると $\pi(E)$ が $\pi(x)$ の最小サポート．よって $F_2(x) = F_2(y)$ より $\pi(E) = E$ で 1 より $\pi(x) = x$． □

A の順序 $<$ は $\mathscr{V}$ に属する．イデアル I は全順序集合の有限部分集合からなるので，辞書式順序で全順序付けできる．よって $\mathrm{On} \times I$ も辞書式順序で全順序付けできる．symmetric な単射写像 $\mathscr{V} \to \mathrm{On} \times I$ を得ているので，$\mathscr{V}$ の全順序 $\prec$ で symmetric クラスなものが定義できる．したがって $\mathscr{V}$ の中で任意の集合は全順序付けできる．

以上より次が得られた．

定理 6. ZFC の無矛盾性を仮定する．このとき AC は OP から ZFA 上独立である．

4 symmetric model

M を ZFC の推移的モデルとし，$(\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}) \in M$ を半順序集合とする．π が P 上の自己同型であるとはそれが P から P への全単射であって，

$$\begin{cases} p \leqslant q \iff \pi(p) \leqslant \pi(q) \ (\forall p, q \in \mathbb{P}) \\ \pi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \end{cases}$$

を満たすことをいう．

P 上の自己同型 π を次のように $M^{\mathbb{P}}$ から $M^{\mathbb{P}}$ への全単射に拡張する．

$$\pi(\dot{x}) = \{(\pi(\dot{y}), \pi(p)) : (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}.$$

すると強制関係は

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \iff \pi(p) \Vdash \varphi(\pi(\dot{x}_1), \ldots, \pi(\dot{x}_n))$$

満たすことに注意する (論理式の構成に関する帰納法で示せる)．

$\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ を $\mathbb{P}$ 上の自己同型全体のなす群とし，$\mathscr{G} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ を部分群とする．各 $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ について

$$\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{x}) = \{\pi \in \mathscr{G} : \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}$$

とおく．

$\mathscr{G}$ の部分群の集合 $\mathcal{F}$ が $\mathscr{G}$ の**ノーマルフィルター**であるとは次を満たすこととする．

1. $\mathscr{G} \in \mathcal{F}$.
2. $H \in \mathcal{F}$ かつ $H \subseteq K$ かつ K が $\mathscr{G}$ の部分群ならば $K \in \mathcal{F}$.

3. $H, K \in \mathcal{F}$ ならば $H \cap K \in \mathcal{F}$.
4. $H \in \mathcal{F}$ かつ $\pi \in \mathscr{G}$ ならば $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$.

$\mathscr{G} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ とその上のノーマルフィルター $\mathcal{F}$ を固定する．

$\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ が **symmetric** とは $\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{x}) \in \mathcal{F}$ を満たすことをいう．

$\mathrm{HS} \subseteq M^{\mathbb{P}}$ を継承的に symmetric な name の全体とする．すなわち

$$\dot{x} \in \mathrm{HS} \iff \dot{x} \text{ は symmetric かつ } \mathrm{dom}(\dot{x}) \subseteq \mathrm{HS}.$$

各 $x \in M$ について check name $\check{x}$ は symmetric であり，$\check{x} \in \mathrm{HS}$ であることに注意する．また，$\dot{x} \in \mathrm{HS}$ と $\pi \in \mathscr{G}$ について必ず $\pi(\dot{x}) \in \mathrm{HS}$ になることにも注意する．

M 上の $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルターG をとる．

$$N = \{\mathrm{val}(\dot{x}, G) : \dot{x} \in \mathrm{HS}\}$$

とおく．

定義より明らかに $N \subseteq M[G]$ であり，任意の check name が HS に属することから $M \subseteq N$ でもある．つまり $M \subseteq N \subseteq M[G]$.

補題. M 上で定義できる関係 $\Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}}$ があって，任意の $\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n \in HS$ について

$$N \models \varphi(\dot{x}^1_G, \ldots, \dot{x}^n_G) \iff \exists p \in G, p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \varphi(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n).$$

証明. 通常の強制の再帰的定義において，$\forall$ の強制の定義を HS の元の範囲を動くように修正すればよい．つまり

$$p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} (\forall x)\varphi(x) \iff (\forall \dot{x} \in \mathrm{HS}) p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \varphi(\dot{x}).$$

□

命題. N は ZF の推移的モデル.

証明. HS の作り方より N が推移的なことは容易に確かめられる．したがって，外延性公理と基礎の公理は成り立つ．

対の公理について．$x, y \in N$ とする．$\{x, y\} \in N$ を示す．$\dot{x}, \dot{y} \in \mathrm{HS}$ で $\dot{x}_G = x, \dot{y}_G = y$ なものをとる．このとき $\dot{z} = \{(\dot{x}, \mathbb{1}), (\dot{y}, \mathbb{1})\}$ とおく．任意の $\pi \in \mathrm{sym}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}(\dot{y})$ について $\pi(\dot{z}) = \dot{z}$ が分かる．よって，$\mathrm{sym}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}(\dot{y}) \subseteq \mathrm{sym}(\dot{z})$．したがって $\mathrm{sym}(\dot{z}) \in \mathcal{F}$．したがって，$\dot{z} \in \mathrm{HS}$ である．ゆえに $\{x, y\} = \dot{z}_G \in N$.

分出公理について．$\varphi(x, a)$ を論理式とする．$X, a \in N$ とし，それらの name を $\dot{X}, \dot{a} \in \mathrm{HS}$ とする．$Y = \{x \in X : \varphi^N(x, a)\} \in N$ を示す．

$$\dot{Y} = \{(\dot{x}, p) : \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a})\}$$

とおく．すると補題より $\dot{Y}_G = Y$ が分かる．

また，$\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(X) \cap \mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(p)$ の任意の元 π について

$$\begin{aligned}
\pi(\dot{Y}) &= \{(\pi(\dot{x}), \pi(p)) : \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a})\} \\
&= \{(\pi(\dot{x}), \pi(p)) : \pi(\dot{x}) \in \mathrm{dom}(\pi(\dot{X})) \wedge \pi(p) \in \mathbb{P} \wedge \pi(p) \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \pi(\dot{x}) \in \pi(\dot{X}) \wedge \varphi(\pi(\dot{x}), \pi(\dot{a}))\} \\
&= \{(\pi(\dot{x}), \pi(p)) : \pi(\dot{x}) \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge \pi(p) \in \mathbb{P} \wedge \pi(p) \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \pi(\dot{x}) \in \dot{X} \wedge \varphi(\pi(\dot{x}), \dot{a})\} \\
&= \{(\dot{x}, p) : \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a})\} \\
&= \dot{Y}
\end{aligned}$$

より $\dot{Y}$ は symmetric である．$\mathrm{dom}(\dot{Y})$ に属する name はもとから HS の元なので，$\dot{Y} \in \mathrm{HS}$.

和集合公理について．$A \in N$ を固定する．このとき $B \in N$ があって，$\bigcup A \subseteq B$ を示せばよい．$\dot{A} \in \mathrm{HS}$ で $\dot{A}_G = A$ なるものをとる．このとき $\dot{B} = \bigcup \mathrm{dom}(\dot{A})$ とおく．すると $\dot{B} \in \mathrm{HS}$ かつ $\bigcup A \subseteq \dot{B}_G$ となっていることが確かめられる．前者は $\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{A}) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{B})$ であることに注意すればよい．

置換公理について．置換公理は次の Collection Principle と同値であった:

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x \in X)[(\exists y)\varphi(x, y, a) \to (\exists y \in Y)\varphi(x, y, a)]$$

よって Collection Principle が N で成り立つことを示す．その際，M での Collection Principle を使う．$\dot{X}, \dot{a} \in \mathrm{HS}$ が与えられたとする．示すべきことは，HS の元 $\dot{Y}$ が存在して

$$N \models (\forall x \in \dot{X}_G)[(\exists y)\varphi(x, y, \dot{a}_G) \to (\exists y \in \dot{Y}_G)\varphi(x, y, \dot{a}_G)]. \tag{1}$$

$\mathbb{P} \times \mathrm{dom}(\dot{X})$ に対して M での Collection Principle を使うことで $Q \in M$ で $Q \subseteq \mathrm{HS}$ であり

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{X}), [(\exists \dot{y} \in \mathrm{HS})p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{a}) \Rightarrow (\exists \dot{y} \in Q)p \Vdash_{M,\mathbb{P},\mathcal{F}} \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{a})]$$

なものをとれる．

$$\dot{Y} = Q \times \{\mathbb{1}\}$$

とおく．補題を使えば (1) が成り立っていることがわかる．

しかし，このままでは $\dot{Y}$ が HS の元か分からない．そこで Q を $\mathscr{G}$ の元で閉じるように膨らませる．具体的には

$$\begin{aligned}
Q_0 &= Q \\
Q_{n+1} &= \{\pi(\dot{y}) : \dot{y} \in Q_n, \pi \in \mathscr{G}\} \ (n \in \omega) \\
Q_\omega &= \bigcup_{n \in \omega} Q_n
\end{aligned}$$

とする．そして $\dot{Y} = Q_\omega \times \{\mathbb{1}\}$ と取り直せば，$\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{Y}) = \mathscr{G}$ となり，$\dot{Y}$ は HS の元になる．

無限公理は $\omega \in N$ より OK.

べき集合公理について．示すべきは任意の $a \in N$ について $b \in N$ があって $\mathcal{P}(a) \cap N \subseteq b$ である．$a \in N$ を任意にとる．$\dot{a} \in \mathrm{HS}$ を $\dot{a}_G = a$ なるようにとる．

$$Q = \{\dot{c} \in \mathrm{HS} : \mathrm{dom}(\dot{c}) \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a})\}$$

とおき，$\dot{b} = Q \times \{\mathbb{1}\}$ とおく．$\dot{b} \in \mathrm{HS}$ は $\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{a}) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{b})$ に注意すればよい．実際，任意の $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{a})$

について

$$\begin{aligned}\pi(\dot{b}) &= \pi``\{(\dot{c}, \mathbb{1}) : \dot{c} \in \mathrm{HS} \land \mathrm{dom}(\dot{c}) \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a})\} \\ &= \{(\pi\dot{c}, \mathbb{1}) : \dot{c} \in \mathrm{HS} \land \mathrm{dom}(\dot{c}) \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a})\} \\ &= \{(\pi\dot{c}, \mathbb{1}) : \pi(\dot{c}) \in \pi``\mathrm{HS} \land \mathrm{dom}(\pi(\dot{c})) \subseteq \mathrm{dom}(\pi(\dot{a}))\} \\ &= \{(\pi\dot{c}, \mathbb{1}) : \pi(\dot{c}) \in \mathrm{HS} \land \mathrm{dom}(\pi(\dot{c})) \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a})\} \\ &= \{(\dot{c}, \mathbb{1}) : \dot{c} \in \mathrm{HS} \land \mathrm{dom}(\dot{c}) \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a})\} \\ &= \dot{b}\end{aligned}$$

より OK.

$\mathcal{P}(a) \cap N \subseteq \dot{b}_G$ を示す．$d \in \mathcal{P}(a) \cap N$ を固定する．$\dot{d} \in \mathrm{HS}$ で $\dot{d}_G = d$ なるものをとる．d の name を作り替えて

$$\dot{c} = \{(\dot{x}, p) : \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \land p \Vdash \dot{x} \in \dot{d}\}$$

とする．すると $\mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{a}) \cap \mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{d}) \subseteq \mathrm{sym}_{\mathscr{G}}(\dot{c})$ が分かり，$\dot{c} \in \mathrm{HS}$ である．よって $\dot{c} \in Q$．また補題より $\dot{c}_G = \dot{d}_G$ が分かる．よって $d \in \dot{b}_G$. □

4.1 選択公理の独立性

この節ではある symmetric model において選択公理の否定が成り立つことを示す．実際は，実数のある部分無限集合 A があり，ω から A への単射が作れないこと (すなわち A は Dedekind 有限なこと) を示す.

M を ZFC の可算推移的モデルとする.

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2) \\ &= \{p : p \text{ は } \omega \times \omega \text{ から } 2 \text{ への有限な部分関数 }\}\end{aligned}$$

とおく．すなわち $\mathbb{P}$ は可算個の実数を加える Cohen 強制である.

$\mathscr{G} = \mathrm{Aut}(\omega)$ とおく．$\pi \in \mathscr{G}$ は次のように $\mathbb{P}$ 上の自己同型を誘導する:

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\pi(p)) &= \{(\pi(n), m) | (n, m) \in \mathrm{dom}(p)\}, \\ \pi(p)(\pi(n), m) &= p(n, m).\end{aligned}$$

これによって $\mathscr{G} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ と思う．各有限集合 $e \subseteq \omega$ について

$$\mathrm{fix}(e) = \{\pi \in \mathscr{G} : \forall n \in e, \pi(n) = n\}$$

とおく．$\mathcal{F}$ を $\mathrm{fix}(e)$ たちによって生成されるフィルターとする．すなわち

$$\mathcal{F} = \{H \subseteq \mathscr{G} : H \text{ は } \mathscr{G} \text{ の部分群であり，ある有限な } e \subseteq \omega \text{ に対して } \mathrm{fix}(e) \subseteq H\}$$

とおく．$\mathcal{F}$ は $\mathscr{G}$ 上のノーマルフィルターである.

M 上の $\mathbb{P}$ ジェネリックフィルター G をとる．$\mathscr{G}$ と $\mathcal{F}$ により，symmetric model N が定まる．この N で選択公理が成り立たないことを示す.

まず，強制拡大で付け加わる各実数とその集合の名前を定義する.

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= \{(\check{m}, p) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(n, m) = 1\} \\ \dot{A} &= \{(\dot{x}_n, \mathbb{1}) : n \in \omega\}\end{aligned}$$

これらの名前を G で解釈すると

$$\begin{aligned} x_n &= \{m \in \omega : \exists p \in G, p(n,m) = 1\} \\ A &= \{x_n : n \in \omega\} \end{aligned}$$

となる．

$\dot{x}_n$ たちと $\dot{A}$ は HS に属し，したがって，x_n たちと A は N に属する．なぜならば，$\pi \in \mathscr{G}, n \in \omega$ に対して

$$\begin{aligned} \pi(\dot{x}_n) &= \{(\pi(\check{m}), \pi(p)) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(n,m) = 1\} \\ &= \{(\check{m}, \pi(p)) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(n,m) = 1\} \\ &= \{(\check{m}, p) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, (\pi^{-1}(p))(n,m) = 1\} \\ &= \{(\check{m}, p) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(\pi(n),m) = 1\} \\ &= \dot{x}_{\pi(n)} \end{aligned}$$

となり，$\mathrm{sym}(\dot{x}_n) = \mathrm{fix}(\{n\}) \in \mathcal{F}$ となるからである．

x_n たちは互いに異なる実数なことに注意する．よって N において A は無限集合である (無限集合であるという性質は Π_1 であることに注意する)．

N において ω から A への単射 f が存在すると仮定する．f の name を $\dot{f} \in \mathrm{HS}$ とする．するとある $p_0 \in G$ がとれて

$$p_0 \Vdash (\dot{f} : \check{\omega} \to \dot{A} \text{ 単射 }).$$

$\mathrm{fix}(e) \subseteq \mathrm{sym}(\dot{f})$ なる有限集合 $e \subseteq \omega$ をとる．e が有限集合で f が単射なので，$i \in \omega, p \in G, n \in \omega \backslash e$ がとれて

$$p \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_n$$

となる．$p \leqslant p_0$ としてよい．$\pi \in \mathrm{fix}(e)$ を $\pi(p)$ と p が compatible かつ $\pi(n) \neq n$ なるようにとる．これは $n' \notin e$ かつ $\forall m \in \omega, (n', m) \notin \mathrm{dom}(p)$ なるように $n' \in \omega$ をとり，n と n' を交換しそれ以外は動かさないような π をとればよい．

すると $\pi \in \mathrm{fix}(e) \subseteq \mathrm{sym}(\dot{f})$ より $\pi(\dot{f}) = \dot{f}$．このとき

$$\pi p \Vdash (\pi(\dot{f}))(\pi(\check{i})) = \pi(\dot{x}_n)$$

より

$$\pi p \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_{\pi(n)}.$$

すると p と $\pi(p)$ の共通の拡大 $q = p \cup \pi(p)$ において

$$q \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_n \wedge \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_{\pi(n)}$$

なので

$$q \Vdash \dot{f} \text{ は関数でない}.$$

$q \leqslant p_0$ だったのでこれは矛盾． $\square$

5　OP が言えて OE が言えないモデル

5.1　可算普遍均質半順序集合

可算な普遍均質半順序集合 P の存在を証明する．

半順序集合 P が**普遍的**とは任意の有限半順序集合が埋め込めることをいう．半順序集合 P が**均質的**とは P の有限部分集合の間の任意の同型が P 上の自己同型に延長できることをいう．

有限半順序集合全体のクラスは次の条件を満たす．

- (融合性) A, B, C を有限半順序集合とし，埋め込み $e : A \to B, f : A \to C$ があれば，有限半順序集合 D と埋め込み $g : B \to D, h : C \to D$ があり，$ge = hf$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ A \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & D \\ & C \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

P が**弱均質的**とは，A, B を P の有限部分集合として，$A \subseteq B$ かつ $f : A \to P$ が埋め込みならば，埋め込み $g : B \to P$ で f を延長するものが存在することをいう．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & P \\ B \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

P が均質的ならば明らかに弱均質的である．実は逆も成り立つ．

補題 7. 可算半順序が弱均質的ならば均質的.

証明. P を弱均質的な可算半順序とし，$P = \{p_n : n \in \omega\}$ とおく．往復論法により有限集合 $P_n, Q_n \subseteq P$ と $f_n : P_n \to Q_n$ 同型を帰納的に作っていく．

$A, B \subseteq P$ 有限集合と $f : A \to B$ 同型写像が与えられたとする．

最初のステップは $P_0 = A, Q_0 = B, f_0 = f$ とする．

$2k$ まで構成できたとする．このとき P_{2k} にすでに p_k が入っていれば $P_{2k+1} = P_{2k}, Q_{2k+1} = Q_{2k}, f_{2k+1} = f_{2k}$ とする．p_k が P_{2k} に入っていなければ P_{2k} と $P_{2k} \cup \{p_k\}$ に対して弱均質性を使って $f_{2k} : P_{2k} \to P$ 埋め込みを延長する $f_{2k+1} : P_{2k} \cup \{p_k\} \to P$ 埋め込みをとる．f_{2k+1} の終域は P からその値域に直しておく．$P_{2k+1} = P_{2k} \cup \{p_k\}, Q_{2k+1} = f_{2k+1}``P_{2k+1}$ とおけばよい．この構成により $p_k \in P_{2k+1}$ が保証される．

$2k+1$ から $2k+2$ を作る部分も逆向きに同じことをすればよい．そうすれば，$p_k \in Q_{2k+2}$ が保証される．

構成より $\bigcup_{n\in\omega} P_n = \bigcup_{n\in\omega} Q_n = P$ であり，$f^* = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ は P 上の自己同型になる．これは与えられた $f_0 = f$ を延長している． □

定理 8. 可算な普遍均質半順序集合 P が存在する．

証明. 有限半順序集合の鎖 $(P_i : i < \omega)$ を以下を満たすように作る:

$$\begin{aligned}&\text{もし } A, B \text{ が有限半順序で } A \subseteq B \text{ かつ埋め込み } f : A \to P_i \text{ for some } i \in \omega \text{ があれば,}\\ &j > i \text{ と埋め込み } g : B \to P_j \text{ で } f \text{ を延長するものが存在する}\end{aligned} \tag{2}$$

これが構成できたとする．このとき $P = \bigcup_{i\in\omega} P_i$ とおく．各 P_i は有限なので P は可算である．P の普遍性は (2) で $A = \varnothing$ とすることで得られる．また (2) より P が弱均質的なこともわかる．実際，$f : A \to P$ が埋め込みならば，A の有限性よりある i があって $f : A \to P_i$ だからである．補題 7 より P は均質的である．

したがって (2) を満たす鎖の存在を示せばよい．$\boldsymbol{S}$ を有限半順序集合 A, B で $A \subseteq B$ なるものの組 (A, B) の可算集合とする．そのような組はすべて同型を除いて $\boldsymbol{S}$ に入っているものとする．

全単射 $\pi : \omega \times \omega \to \omega$ で $\pi(i, j) \geqslant i$ for all i, j なるものをとる．

P_0 は有限半順序集合なら何でもよい．

P_k まで定義されたとする．(f, A, B) で $(A, B) \in \boldsymbol{S}$ と $f : A \to P_k$ を満たすものをすべて $((f_{kj}, A_{kj}, B_{kj}) : j < \omega)$ とリストする．

P_{k+1} を融合性を使って構成する．$k = \pi(i, j)$ とすると P_{k+1} を B_{ij} と P_k の A_{ij} に関する融合とする．$P_k \subseteq P_{k+1}$ となるように P_{k+1} の台集合を取り直す．

$$\begin{tikzcd}
 & B_{ij} \arrow[dr, dashed] & \\
A_{ij} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "I_{ik}\circ f_{ij}"'] & & P_{k+1} \\
 & P_k \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

ただし図の I_{ik} は P_i から P_k への包含写像.

この構成で (2) が満たされることは明らかであろう． □

補題 9. $(P, <)$ を可算普遍均質半順序集合とし，$\mathscr{G}$ を P のすべての自己同型の全体のなす群とする．$E_1, E_2 \subseteq \mathbb{P}$ が有限集合ならば，

$$\mathrm{fix}(E_1 \cap E_2) = [\mathrm{fix}(E_1) \cup \mathrm{fix}(E_2)].$$

証明. [TODO] □

構造 $(P, <, \prec)$ で $<$ は半順序で，$\prec$ は全順序なものを考える．このような構造の同型とは $<$ と $\prec$ をそれぞれ両方向に保つものである．普遍均質構造を定義でき，定理 8 と補題 9 について同様のことが成り立つ．

アトムの集合 A を可算とし，$(A, <, \prec)$ が普遍均質構造となるような $<$ と $\prec$ をとる．G を $(A, <, \prec)$ のすべての同型写像全体とする．I を A の有限集合全体からなるノーマルイデアルとする．$\mathscr{V}$ を G と I から定まる permutation model とする．

命題 10. この $\mathscr{V}$ において任意の集合は全順序付けできるが，全順序に延長できない半順序が存在する．

証明. Mostowski モデルのときのように各 $x \in \mathscr{V}$ は最小のサポートを持ち，単射で symmetric なクラス写像 $\mathscr{V} \to \mathrm{On} \times I$ を得る．したがって，任意の $x \in \mathscr{V}$ は全順序付けできる．

A の半順序 $<$ が $\mathscr{V}$ の中で全順序に延長できないことを示そう．背理法で，$<^*$ を $<$ の延長で $\mathscr{V}$ の元としよう．$<^*$ のサポートを $E \subseteq A$ とする．

a, b, c, d を次の条件を満たす A の元とする

- a, b, c, d はすべて $<$ と $\prec$ の両方において E のどの元よりも大きい．
- $a \prec b \prec c \prec d$.
- $a < c, d < b$ でありほかの組は比較不能．

$(A, <, \prec)$ が普遍均質なのでこのような a, b, c, d はとれる．

このとき $a <^* b$ と $b <^* a$ の両方が矛盾を導くことを言う．

もし，$a >^* b$ ならば $\pi \in \mathrm{fix}(E)$ を $\pi(a) = b, \pi(b) = c$ なるものとする．π は $\pi \in \mathrm{fix}(E) \subseteq \mathrm{sym}(<^*)$ より $<^*$ を保存するので，$b >^* c$ を得る．一方で $a < c$ なので矛盾である．

もし，$a <^* b$ だとする．$\pi \in \mathrm{fix}(E)$ を $\pi(a) = b, \pi(b) = c$ なるものとする．すると $\pi(a) <^* \pi(b)$ より $b <^* c$．また，$\rho \in \mathrm{fix}(E)$ を $\rho(a) = c, \rho(b) = d$ なるものとする．すると $\rho(a) <^* \rho(b)$ より $c <^* d$．したがって，$b <^* c <^* d$ となり，$d < b$ に矛盾． $\square$

参考文献

[1] T.J. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.

[2] L.J. Halbeisen. *Combinatorial Set Theory: With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer Monographs in Mathematics. Springer London, 2011.

[3] W. Hodges and S.M.S.W. Hodges. *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997.

[4] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.

[5] alg-d. *permutation* モデル. `http://alg-d.com/math/ac/permutation.pdf`.

[6] alg-d. *symmetric* モデル. `http://alg-d.com/math/ac/symmetric.pdf`.

[7] Ulrich Felgner and John K Truss. "The independence of the prime ideal theorem from the order-extension principle". In: *The Journal of Symbolic Logic* 64.1 (1999), pp. 199–215.