非可算個の駅にとまる列車

後藤達哉
筑波大学理工学群数学類 4 年

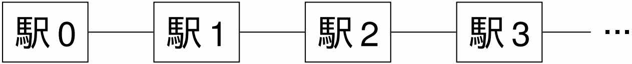
2019 年 11 月 4 日

1. 問題
2. 順序数
3. 降ろし方の例
4. 証明
5. まとめ

1. 問題
2. 順序数
3. 降ろし方の例
4. 証明
5. まとめ

問題

この列車は駅 0 で乗客がいない状態から出発して
そこから先の各駅 1, 駅 2, 駅 3... でそれぞれ 1 人降ろし，可算無限人を乗せる．ただし，乗客が 0 人のときは降ろす操作は省く．
すると最小の非可算順序数 ω_1 番目の駅では乗客は何人になっているだろうか？



直感

直感的には各駅で乗客が増えるのだから，乗客の数は単調増加していき，$\omega \times \omega_1 = \omega_1$ になりそうな気がする．

答え

実は答えは０人である！

考察

乗客の降ろし方 (各駅でどの客を降ろすか) によって結果が変わってくるのではないかと考えられる．しかし，どんな降ろし方をしても ω_1 番目の駅で 0 人になるのである．

考察

乗客の降ろし方によって変わるであろうというのは次のような変種の問題から予想できる．

> 出発時に ω 人乗客を乗せているとする．各駅で 1 人降りて，新たに乗客はどの駅でも乗らないとする．このとき ω 番目の駅で乗客の数は？

この問題は乗客の降ろし方によって 0 以上 ω 以下のすべての値がありえるというのが答え．

考察

出発時に ω 人乗客を乗せているとする．各駅で 1 人降りて，新たに乗客はどの駅でも乗らないとする．このとき ω 番目の駅で乗客の数は？

乗客に自然数で番号を振る．

- 駅 i で乗客 i を降ろせば駅 ω での乗客の数は 0.
- 駅 i で乗客 $i+1$ を降ろせば駅 ω での乗客の数は 1.
- 駅 i で乗客 $i+2$ を降ろせば駅 ω での乗客の数は 2.
- $\ldots$
- 駅 i で乗客 $2i$ を降ろせば駅 ω での乗客の数は ω.

整列集合

- 任意の空でない部分集合が最小元を持つような全順序集合を**整列集合**という.
- 例: 空集合 $\varnothing$, 1 点集合 $\{0\}$, 2 点集合 $\{0, 1\}$, 3 点集合 $\{0, 1, 2\}$, 自然数全体 $\mathbb{N}$ などは整列集合. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ などは整列集合でない.
- 集合 { あ, い, う } で あ < い < う と順序を入れたものも整列集合だが, これは $\{0, 1, 2\}$ と本質的に同じ (同型).

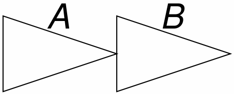
整列集合

- 整列集合は同型なものを除いて $\{0, 1, \dots, n-1\}$ $(n \in \mathbb{N})$ と $\mathbb{N}$ で尽くされているか？
- → 実は全くそんなことはない．もっと「長い」整列集合がいくらでもある．

整列集合の直和

A, B を整列集合とする．その集合としての直和 $A \sqcup B$ に次で順序を入れたものは整列集合になる．これを整列集合 A, B の**直和**ということにする．

- A の元同士は A に入っている順序で比べる．
- B の元同士は B に入っている順序で比べる．
- A の元と B の元では必ず A の元の方が小さい．



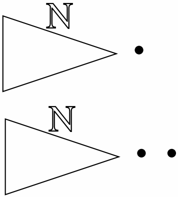
整列集合の直和

$A = \mathbb{N}, B = \{0\}$ に対してその直和 $\mathbb{N} \sqcup \{0\}$ は $\mathbb{N}$ に最大元を追加した整列集合になっている．これは $\mathbb{N}$ より「長い」整列集合.

$\mathbb{N} \sqcup \{0, 1\}$ は $\mathbb{N} \sqcup \{0\}$ にもう一度最大元を追加した整列集合.

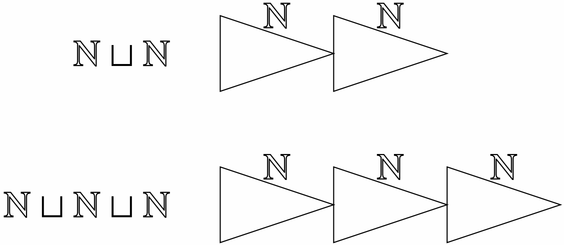
$\mathbb{N} \sqcup \{0\}$

$\mathbb{N} \sqcup \{0, 1\}$



整列集合の直和

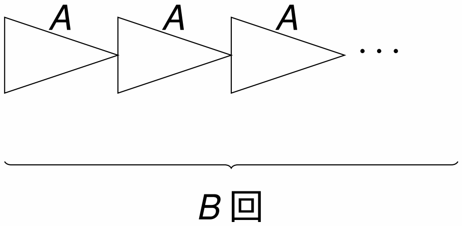
$\mathbb{N}$ の後に $\mathbb{N}$ を繋げるとより「長い」整列集合が得られる．



整列集合の積

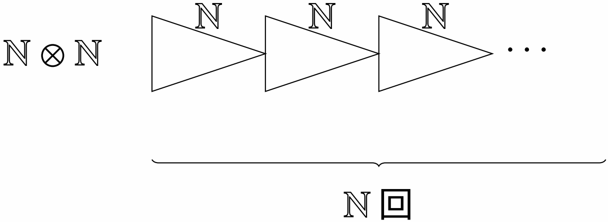
整列集合 A, B があったら A を B だけコピーして並べて得られる整列集合があり $A \otimes B$ と書く．これを A, B の積と呼ぶ．正確には

- $A \otimes B$ は集合としては直積集合 $A \times B$ であり，順序は逆辞書式順序を入れたもの．



整列集合の積

先ほどの $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$ は積を使うと $\mathbb{N} \otimes \{0, 1, 2\}$ のことである.
$\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$ という今まで見てきた整列集合より長い整列集合が得られる.



比較定理

比較定理

二つの整列集合 A, B に対して次の 3 つのどれかちょうど 1 つが成り立つ.

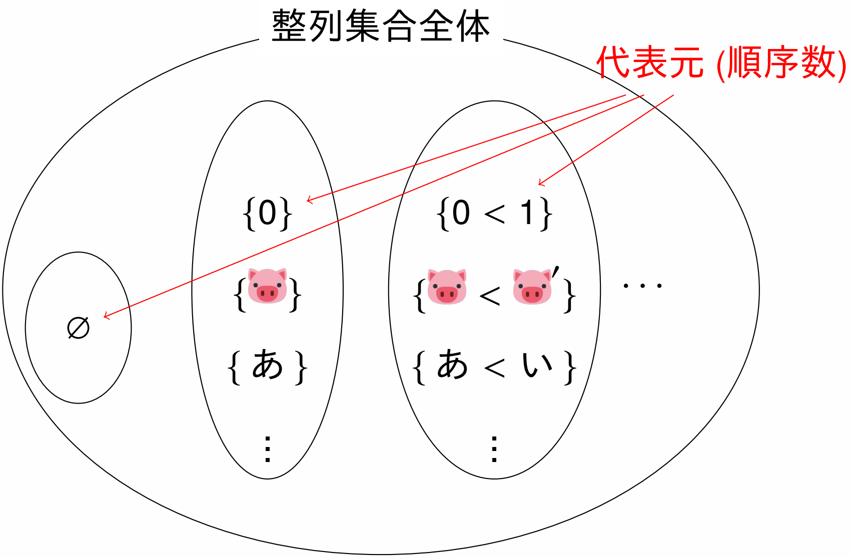
- A と B は同型 (A と B は同じ長さ).
- A は B のある切片と同型 (A は B より短い).
- B は A のある切片と同型 (B は A より短い).

ここに A の元 $a \in A$ における切片とは $\{x \in A \mid x < a\}$ のこと.

順序数

したがって，整列集合同士に長い・短いで順序が定義できる．しかし，同じ長さの整列集合はたくさんある．
そこで整列集合の間の同型という関係での同値類から一個ずつ代表を選び，その代表たちを**順序数**と呼ぶ．
定義より任意の整列集合 A に対して一意にそれと同型な順序数 α が存在する．α を type(A) と書き，A の順序型という．

順序数



順序数と自然数

自然数 n に対して，整列集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ の順序型 $\mathrm{type}(\{0, 1, \ldots, n-1\})$ を n と同一視する．
自然数全体 $\mathbb{N}$ の順序型を ω と書く．
順序数 α に対して，$\mathrm{type}(\alpha \sqcup 1)$ を $S(\alpha)$ と書き，α の後続者という．

後続順序数と極限順序数

- $S(\beta)$ の形に書ける順序数を後続順序数という.
- 0 でも後続順序数でもない順序数を極限順序数という.
- 例: 自然数 1, 2, 3, ... は後続順序数であり ω は極限順序数.

順序数の大小

- 整列順序に対して長い短いの概念が定義された.
- 順序数 α, β に対して，α が β より短いとき $\alpha < \beta$ と書く.

超限再帰と超限帰納法

- 自然数上の関数 $f(n)$ は $f(n)$ の値を決めるためにそれより前の値 $f(0), \dots, f(n-1)$ を参照して定義することができた (再帰的定義; 例: 数列の漸化式による定義).
- また自然数に関する述語 $P(n)$ は n を固定して $P(m)$ $(m < n)$ は正しいと仮定して $P(n)$ を示せばすべての n について $P(n)$ が示せるのであった (数学的帰納法).
- これら再帰・帰納法は順序数へ一般化できる.

超限再帰と超限帰納法

- すなわち順序数上の関数 $f(\alpha)$ の値を決めるにはそれより前の値 $f(\beta)$ $(\beta < \alpha)$ を参照して定義することができる (超限再帰).
- そして順序数に関する性質 $P(\alpha)$ は α を固定して $P(\beta)$ $(\beta < \alpha)$ は正しいと仮定して $P(\alpha)$ を示せばすべての α について $P(\alpha)$ が示せるのである (超限帰納法).

順序数の sup

順序数の集合 A に対してその上限 $\sup A$ は必ず存在する.

順序数の演算

超限再帰を使って順序数の和・積・べきを定義できる．和の定義:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha + \beta), \\ \alpha + \gamma &= \sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta) \ (\gamma \text{ が極限順序数のとき}). \end{aligned}$$

積の定義:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0, \\ \alpha \cdot S(\beta) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha, \\ \alpha \cdot \gamma &= \sup_{\beta<\gamma}(\alpha \cdot \beta) \ (\gamma \text{ が極限順序数のとき}). \end{aligned}$$

順序数の演算

べきの定義:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 1, \\ \alpha^{S(\beta)} &= \alpha^\beta \cdot \alpha, \\ \alpha^\gamma &= \sup_{\beta<\gamma}(\alpha^\beta) \ (\gamma \text{ が極限順序数のとき}). \end{aligned}$$

順序数の演算

順序数の和・積は整列集合の直和・積に対応するものである:

$$\alpha + \beta = \mathrm{type}(\alpha \sqcup \beta),$$
$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\alpha \otimes \beta).$$

したがって，$\omega + 1$ は $\mathbb{N} \sqcup \{0\}$ の順序型であるし $\omega \cdot \omega$ は $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$ の順序型である.

順序数の演算

こうして定義された順序数算術について，自然数上の算術と同様の法則は多くの部分について成り立つ:

- 結合法則: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.
- 左分配法則: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
- 0 と 1: $0+\alpha=\alpha+0=\alpha, 0\cdot\alpha=\alpha\cdot 0=0, 1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha$.
- 左消去法則: $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ ならば $\beta=\gamma$. $\alpha\neq 0$ かつ $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$ ならば $\beta=\gamma$.
- 減算: $\alpha\leq\beta$ ならば $\exists!\gamma(\alpha+\gamma=\beta)$.

順序数の演算

- 除算: $\alpha > 0$ で β を任意とすると $\exists!\gamma\exists!\delta(\beta = \alpha \cdot \gamma + \delta \wedge \delta < \alpha)$.
- 指数法則: $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}, \alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$.
- 大小保存:
  $\beta < \gamma$ ならば $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$,
  $\alpha > 0$ かつ $\beta < \gamma$ ならば $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$,
  $\beta \leq \gamma$ ならば $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$,
  $\beta \leq \gamma$ ならば $\beta \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \alpha$,
  $\alpha > 1$ かつ $\beta < \gamma$ ならば $\alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma}$ かつ $\beta^{\alpha} \leq \gamma^{\alpha}$.

順序数の演算

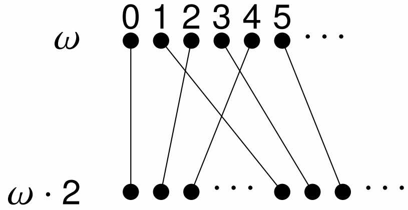
一方で次の法則は成り立たない.

- 交換法則: $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
- 右分配法則: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.
- 右消去法則: $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ならば $\beta = \gamma$.
  $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha$ ならば $\beta = \gamma$.
- 狭義の大小の保存:
  $\beta < \gamma$ ならば $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$,
  $\alpha > 0$ かつ $\beta < \gamma$ ならば $\beta \cdot \alpha < \gamma \cdot \alpha$,
  $\alpha > 0$ かつ $\beta < \gamma$ ならば $\beta^\alpha < \gamma^\alpha$.

可算順序数と ω_1

- 集合としてのサイズが可算な順序数を可算順序数という．
- 自然数，ω，$\omega+1, \omega+2, \omega\cdot 2$ などはすべて可算順序数．

たとえば，$\omega\cdot 2$ は ω と容易に全単射が作れる．



可算順序数と ω_1

- 一般に可算順序数同士の和・積・べきは可算順序数になる.
- 最小の非可算順序数が存在し，それを ω_1 という.

$\alpha\downarrow$

順序数 α に対して

$$\alpha\downarrow = \{\beta\colon \text{順序数} \mid \beta < \alpha\}$$

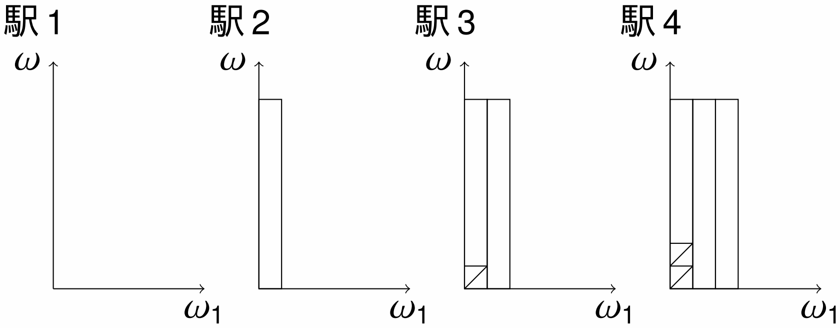
と定義する.

降ろし方の例1

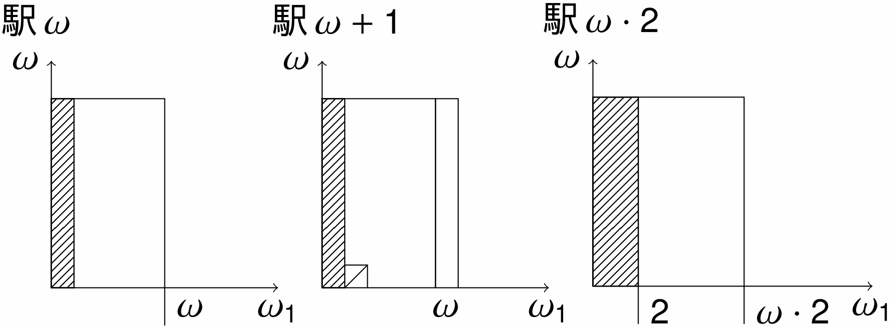
それでは最初の問題を具体的な降ろし方で考えてみよう．客全体の集合を $\omega_1{\downarrow} \times \omega{\downarrow}$ と思う $((\alpha, i)$ は駅 α で乗る客の一人).

降ろし方として $\omega_1{\downarrow} \times \omega{\downarrow}$ に辞書式順序を入れて，現在の乗客全体の集合のこの順序に関する最小元を降ろす客にするというものを考える.

降ろし方の例1

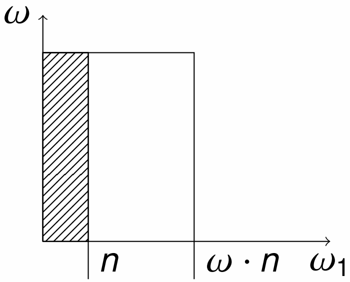


降ろし方の例1

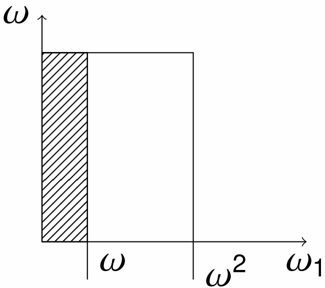

駅 ω
ω
ω
ω_1
駅 $\omega + 1$
ω
ω
ω_1
駅 $\omega \cdot 2$
ω
2
$\omega \cdot 2$
ω_1

降ろし方の例1

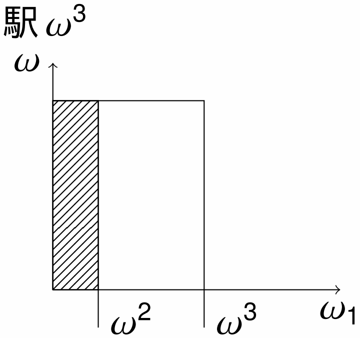
駅 $\omega \cdot n$



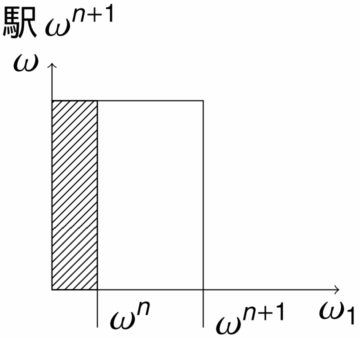
駅 ω^2



降ろし方の例1

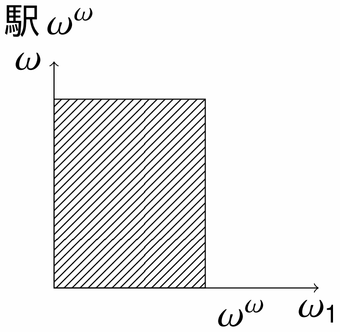


駅 ω^3
ω
ω^2
ω^3
ω_1



駅 ω^{n+1}
ω
ω^n
ω^{n+1}
ω_1

降ろし方の例 1



駅 ω^ω で乗客は 0 になる！

補題

補題

降ろし方を任意に固定する．γ を極限順序数とする．乗客が 0 人になるような駅 β が γ 未満に非有界に存在する，すなわち

$$(\forall\alpha<\gamma)(\exists\beta<\gamma)(\alpha<\beta\wedge \text{駅}\,\beta\,\text{で乗客は}\,0)$$

ならば，駅 γ でも乗客は 0 である．

証明．駅 γ までに乗ってくる乗客を任意に一人固定しよう．その一人は仮定より駅 γ までに降りている．ところが，今固定した乗客は任意だったので，すべての客は γ までに降りている． □

降ろし方の例1

同様のことを繰り返すだけなので $\omega^\omega \cdot n \ (n \in \omega)$ でやはり 0 人になる．また，先の補題より $\omega^\omega \cdot \omega$ でも 0 人になる．
実は，超限帰納法により ω^ω の任意の倍数で 0 人になる．ω_1 は ω^ω の倍数なので駅 ω_1 でも乗客は 0 になる．

ただしここで α の倍数とはある β を使って $\alpha \cdot \beta$ と書ける順序数のことを言うものとする．

降ろし方の例2

今度は乗客全体の集合に逆辞書式順序を入れて，その順序での最小元を降ろすことを考えよう．この場合は次で定義される順序数 ε_0 の番号の駅で 0 人になる．

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots\}$$

やはり ω_1 は ε_0 の倍数なので ω_1 で 0 人になる．

降ろし方の例

二つの例で，駅 ω_1 で 0 人になることがわかった．
では，駅 ω_1 で 1 人以上残す降ろし方はあるのだろうか？
実はないことを示す．

1. 問題
2. 順序数
3. 降ろし方の例
4. **証明**
5. まとめ

問題 (再掲)

問題

この列車は駅 0 で乗客がいない状態から出発して そこから先の各駅 1, 駅 2, 駅 3... でそれぞれ 1 人降ろし，可算無限人を乗せる．ただし，乗客が 0 人のときは降ろす操作は省く．
すると ω_1 番目の駅では乗客は必ず 0 人になる．

Fodor の補題

次の補題を使う.

Fodor の補題 (ω_1 のとき)

$f : \omega_1{\downarrow} \to \omega_1{\downarrow}$ は $(\forall \alpha \in \omega_1{\downarrow} \setminus \{0\})(f(\alpha) < \alpha)$ を満たすとする．このとき $\alpha < \omega_1$ が存在して，$f^{-1}\{\alpha\}$ は $\omega_1{\downarrow}$ の非有界集合となる.

証明

$f : \omega_1\!\downarrow \to \omega_1\!\downarrow$ を次で定義:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta & \text{駅 } \alpha \text{ で降りる人が駅 } \beta \text{ で乗った人のとき} \\ 0 & \text{駅 } \alpha \text{ で降りる人がいなかったとき} \end{cases}$$

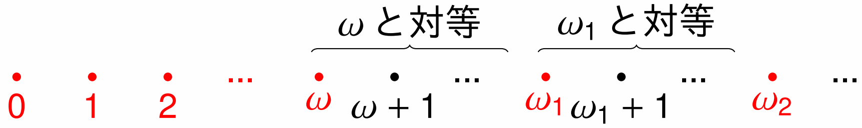
このとき f は $f(\alpha) < \alpha$ (for $\alpha > 0$) を満たす．よって $\beta < \omega_1$ があって $f^{-1}\{\beta\}$ は非有界集合である．
$\beta > 0$ なら駅 β で降りた人が非可算人になってしまい設定に反する．よって，$\beta = 0$.
これは乗客の数 0 で到着した駅全体が $\omega_1\!\downarrow$ の非有界集合になっている．すると補題により駅 ω_1 にたどり着いたときも乗客は 0 である． $\square$

一般化

この結果を一般化したい！

基数

- 順序数 α は α より小さい順序数との全単射が存在しないとき，基数という．
- 自然数，ω, ω_1 は基数である．
- 基数であることを強調するときは ω を $\aleph_0$, ω_1 を $\aleph_1$ と書いたりすることもある (本稿では使わない).



基数

- 基数 κ に対してそれより大きい最小の基数を κ^+ と書く．たとえば $\omega^+ = \omega_1$.
- 集合 A に対し，A と対等な基数を A の濃度といい，$|A|$ と書く (これは存在すれば一意．存在性は一般には選択公理による).

Fodor の補題

Fodor の補題は非可算で「正則」な基数に一般化できる．

Fodor の補題

κ を非可算な正則基数とする．$f : \kappa{\downarrow} \to \kappa{\downarrow}$ は $(\forall \alpha \in \kappa{\downarrow} \setminus \{0\})(f(\alpha) < \alpha)$ を満たすとする．このとき $\alpha < \kappa$ が存在して，$f^{-1}\{\alpha\}$ は $\kappa{\downarrow}$ の非有界集合となる．

一般化

ω_1 のときと同じ証明で次が示せる．

定理

κ を非可算正則基数，$\lambda < \kappa$ を無限基数とする．各駅で降りる人の数は 1，乗る人の数は λ とする．このとき駅 κ で乗客は 0 人になっている．

一般化

また，特異基数の下には正則基数が非有界に存在することから次も言える．

定理

κ を (正則とは限らない) 非可算基数，$\lambda < \kappa$ を無限基数とする．各駅で降りる人の数は 1，乗る人の数は λ とする．このとき駅 κ で乗客は 0 人になっている．

一般化

こうなると最後の駅が基数 κ ではなく順序数 α だった場合が気になる．実は次が言える．

定理

α を順序数，λ を無限基数とする．各駅で降りる人の数は 1，乗る人の数は λ とする．このとき

$$\text{駅}\ \alpha\ \text{で乗客が必ず 0 人になる} \iff \alpha\ \text{は}\ \lambda^+\ \text{の倍数}$$

が成立する．

ここでもちろん，右辺の条件の意味は $(\exists\beta)(\alpha = \lambda^+ \cdot \beta)$ である．

一般化

$\Leftarrow$ の証明．先ほどの定理より駅 λ^+ で 0 人になる．駅 $\lambda^+ \cdot 2 = \lambda^+ + \lambda^+$ でも同じことが起こり，帰納的に λ^+ の倍数で常に 0 人になることがわかる．よって $\Leftarrow$ が示せた．

一般化

$\Rightarrow$ の証明．順序数の除算により
$\alpha = \lambda^+ \cdot \beta + \gamma, 1 \leq \gamma < \lambda^+$ とする．$\Leftarrow$ より $\lambda^+ \cdot \beta$ では常に 0 人となるのだから，$\alpha = \gamma$ としてよい．
すなわち $\alpha < \lambda^+$ としてよい．
すると $|\alpha| \leq \lambda$．そこで駅 1 で乗ってくる λ 人 (の部分集合) を順序型 $\alpha + 1$ で整列する．
すなわち駅 1 で乗ってくる乗客のある部分集合 A と $\alpha + 1$ に全単射が作れるので，$\alpha + 1$ の順序を使って A の順序を定義する．この順序のもとでの最小元を降ろしていけば駅 α で 1 人は残る．よって $\Rightarrow$ が示された． □

降りる人の数も一般化したとき

定理

α を順序数，μ, λ を $\mu \leq \lambda$ なる (無限とは限らない) 基数とする．各駅で降りる人の数は μ，乗る人の数は λ とする．このとき $\lambda \geq \omega$ ならば

$$\text{駅}\ \alpha\ \text{で乗客が必ず 0 人になる} \iff \alpha\ \text{は}\ \lambda^+\ \text{の倍数}$$

が成立し，$\mu < \lambda < \omega$ なら

$$\text{駅}\ \alpha\ \text{で乗客が必ず 0 人になる} \iff \alpha\ \text{は}\ \omega_1\ \text{の倍数}$$

が成立する．$\mu = \lambda < \omega$ なら全ての駅で乗客は必ず 0 である．

まとめ

- 各駅で一人降りて可算無限人載ってくるという列車で ω_1 番目の駅では必ず乗客は 0 人になることを示した.
- 最後の駅の番号，降りる人の数，乗る人の数の一般化をした.

- 無限はたまに直感に反することが起きる.
- 面白い！

最後に問題

問題

降ろす人の数 1，乗る人の数 ω とする．次の主張は正しいか？

- ある降ろし方が存在して駅 ω で乗客が 0 になる．

参考文献

[1] 渕野 昌. ミステリー・トレイン. http://fuchino.ddo.jp/misc/mystery-train-susemi.pdf.

[2] 渕野 昌. *Mystery Train*. http://fuchino.ddo.jp/misc/wakatenokai10-text.pdf.

[3] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.