L における実数の正則性

後藤達哉 (筑波大学理工学群数学類 4 年)

2019 年 11 月 27 日

記法. $\mathcal{N} = {}^{\omega}\omega$ とする．$\mathcal{N}$ の元を実数と呼ぶ．本稿では文字 α, β, γ は必ず実数を表すために使う (順序数は ξ, ζ を使う).

本稿では次の定理を証明する．

定理 1.
1. $\mathcal{N} \subseteq L$ ならば $\mathcal{N}$ の Π^1_1 部分集合 A が存在して A は完全集合の性質を持たない.
2. $\mathcal{N} \subseteq L$ ならば $\mathcal{N}$ の Δ^1_2 部分集合 A が存在して A は Lebesgue 可測性も Baire の性質も持たない.

次の事実があったことに注意する．

事実 2.
1. $\mathcal{N}$ の $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ 部分集合はすべて完全集合の性質を持つ.
2. $\mathcal{N}$ の $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ 部分集合と $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$ 部分集合はすべて Lebesgue 可測かつ Baire の性質を持つ.

よって，定理 1 は，事実 2 の主張に現れる pointclass を射影階層の意味では ZFC においてこれ以上広げられないことを意味している．

1　完全集合の性質と Baire の性質の定義

X をポーランド空間とする．

孤立点を持たない X の閉集合を X の**完全集合**という．部分集合 $A \subseteq X$ が可算であるか，または空でない完全集合を持つとき，A は**完全集合の性質を持つ**という．

部分集合 $A \subseteq X$ が **nowhere dense** とは $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \varnothing$ を満たすことをいう．nowhere dense 集合の可算和で書ける集合を **meager** という．A が **Baire の性質を持つ**とは，開集合 G があって対称差 $A \triangle G$ が meager となるときをいう．

2　解析階層の復習

二階算術の言語 $\mathcal{L}^2 = \{+, \cdot, <, 0, 1, \mathrm{ap}\}$ とその上の標準的構造 $\mathbf{A}^2 = (\omega, \mathcal{N}, +, \cdot, <, 0, 1, \mathrm{ap})$ を考える．

この節では一階の対象を指す変数および自然数に $a, b, c, \ldots$ という文字を使い，二階の対象を指す変数およ

び実数に $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ という文字を使う．

ただし ap は二階の対象と一階の対象を一つずつ受け取り，一階の対象を返す関数記号であり，それの標準的構造での解釈は $\mathrm{ap}(\alpha, i) = \alpha(i)$ である．

1. $\mathcal{L}^2$ で二階の量化がなく，一階の量化がすべて有界な論理式を Δ^0_0 論理式と呼ぶ．
2. Δ^0_0 論理式 φ を使って次のように書ける論理式を Σ^0_n 論理式と呼ぶ:
$$(\exists a_1)(\forall a_2)\ldots(Qa_n)\varphi.$$
3. Δ^0_0 論理式 φ を使って次のように書ける論理式を Π^0_n 論理式と呼ぶ:
$$(\forall a_1)(\exists a_2)\ldots(Qa_n)\varphi.$$
4. ある m について Σ^0_m または Π^0_m となっている論理式 φ を使って次のように書ける論理式を Σ^1_n 論理式と呼ぶ:
$$(\exists \alpha_1)(\forall \alpha_2)\ldots(Q\alpha_n)\varphi.$$
5. ある m について Σ^0_m または Π^0_m となっている論理式 φ を使って次のように書ける論理式を Π^1_n 論理式と呼ぶ:
$$(\forall \alpha_1)(\exists \alpha_2)\ldots(Q\alpha_n)\varphi.$$

これらの概念を使い，$\omega^k \times \mathcal{N}^l$ $(k, l \in \omega)$ の部分集合に対するクラスを次で定める:

1. Σ^0_n 論理式，Π^0_n 論理式，Σ^1_n 論理式，Π^1_n 論理式でパラメータを使わずに定義できる $\omega^k \times \mathcal{N}^l$ の部分集合をそれぞれ Σ^0_n 集合，Π^0_n 集合，Σ^1_n 集合，Π^1_n 集合という．
2. Σ^0_n 集合でかつ Π^0_n 集合な $\omega^k \times \mathcal{N}^l$ の部分集合を Δ^0_n 集合といい，Σ^1_n 集合でかつ Π^1_n 集合な $\omega^k \times \mathcal{N}^l$ の部分集合を Δ^1_n 集合という．
3. Σ^0_n 論理式，Π^0_n 論理式，Σ^1_n 論理式，Π^1_n 論理式でパラメータを使って定義できる $\omega^k \times \mathcal{N}^l$ の部分集合をそれぞれ $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ 集合，$\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ 集合，$\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ 集合，$\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$ 集合という．
4. $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_n$ 集合でかつ $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_n$ 集合な $\omega^k \times \mathcal{N}^l$ の部分集合を $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^0_n$ 集合といい，$\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^1_n$ 集合でかつ $\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^1_n$ 集合な $\omega^k \times \mathcal{N}^l$ の部分集合を $\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_n$ 集合という．

注意． $\utilde{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1$ 集合はちょうど開集合のことであり，$\utilde{\boldsymbol{\Pi}}^0_1$ 集合はちょうど閉集合のことである．また，$\utilde{\boldsymbol{\Delta}}^1_1$ 集合はちょうど Borel 集合のことである．

$\omega^k (k \geqslant 1)$ の形をした空間を type 0 の空間，$\omega^k \times \mathcal{N}^l$ $(k, l \in \omega, l \geqslant 1)$ の形をした空間を type 1 の空間という．type 1 以下の空間 X と type 0 の空間 ω^k の間の写像 $f : X \to \omega^k$ が **recursive** とはそのグラフが Σ^0_1 なことを言う．type 1 以下の空間 X と $\mathcal{N}$ の間の写像 $f : X \to \mathcal{N}$ が **recursive** とはそのアンカリー化

$$\begin{aligned} f^* : X \times \omega &\to \omega \\ (x, a) &\mapsto f(x)(a) \end{aligned}$$

が recursive なことと定める．終域が $\mathcal{N}$ ではなく一般の type 1 な空間なときも同様にアンカリー化と recursive 性が定められる．

3　L の復習

記法． 集合論の言語を $\mathcal{L}^{\in}$ と書く．集合論の内部で定義された $\mathcal{L}^{\in}$ 論理式全体の集合を Form と書く．Form の元 φ と集合 A と $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対して

$$(A, \in) \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

という satisfaction 関係が集合論の内部で通常通り定義される．

定義 (Def)**．** 集合 X が集合 A 上**定義可能**とは $\varphi \in \mathrm{Form}$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ があって

$$X = \{x \in A \mid (A, \in) \models \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

となるときをいう．

集合 A に対して，

$$\mathrm{Def}(A) = \{X \subseteq A \mid X \text{ は } A \text{ 上定義可能 }\}$$

とおく．

定義 (L)**．** 各順序数 ξ に対して集合 L_ξ を次のように帰納的に定める:

$$\begin{aligned} L_0 &= \varnothing, \\ L_{\xi+1} &= \mathrm{Def}(L_\xi), \\ L_\xi &= \bigcup_{\zeta<\xi} L_\zeta \quad (\xi \text{ は極限順序数}). \end{aligned}$$

そしてクラス L を次で定める:

$$L = \bigcup_{\xi \in \mathrm{ON}} L_\xi.$$

事実．

1. 各 L_ξ は推移的で，$\xi \geqslant \omega$ なら $|L_\xi| = |\xi|$.
2. L は ZF のモデルである．
3. 関数 $\xi \mapsto L_\xi$ と関係 $P(x, \xi) \iff x \in L_\xi$ は ZF-絶対的．
4. L 上に整列順序 $\leqslant_L$ が存在し，各 L_ξ はこの順序において始切片である:

   $$x \in L_\xi \wedge y \leqslant_L x \implies y \in L_\xi.$$

   またこの関係 $\leqslant_L$ は ZF-絶対的である．
5. L において $V = L$ が成り立つ．
6. L において AC が成り立つ．（4 と 5 よりわかる）

事実 (Condensation Lemma)**．** $\mathcal{L}^{\in}$ の文の有限集合 T_L があり次を満たす:

1. L は T_L を満たす．
2. A が推移的集合で $A \models T_L$ ならば，ある極限順序数 ξ があり $A = L_\xi$ である．
3. 任意の順序数 $\xi \geqslant \omega$ と任意の集合 $x \in L$ で $x \subseteq L_\xi$ なものに対してある順序数 ζ が存在して

$$\xi \leqslant \zeta < \xi^+, L_\zeta \models T_L, x \in L_\zeta$$

となる．

4 $\mathcal{N} \subseteq L$ のとき $\mathcal{N}$ に Σ^1_2-good な整列順序がのること

定理 3 (Gödel, Addison)**.** 1. $\mathcal{N} \cap L$ は $\mathcal{N}$ の Σ^1_2 部分集合．

2. $\leqslant_L$ の $\mathcal{N}$ への制限は $\mathcal{N} \cap L$ の Σ^1_2-good な整列順序である．すなわち，もし $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ が Σ^1_2 ならば次で定義される $Q, R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ も Σ^1_2 である:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, x) &\iff \alpha \in L \wedge (\exists \beta \in \mathcal{N} \cap L)(\beta \leqslant_L \alpha \wedge P(\beta, x)), \\ R(\alpha, x) &\iff \alpha \in L \wedge (\forall \beta \in \mathcal{N} \cap L)(\beta \leqslant_L \alpha \to P(\beta, x)). \end{aligned}$$

3. $\mathcal{N} \subseteq L$ ならば $\mathcal{N}$ は Σ^1_2-good な整列順序で順序型が ω_1 なものを持つ．

証明. 1 について．T_L を Condensation Lemma が主張する文の有限集合とする．このとき実数 $\alpha \in \mathcal{N}$ について

$$\alpha \in L \iff \text{可算推移的な集合 } A \text{ が存在して } (A, \in) \models T_L \text{ かつ } \alpha \in A \qquad (*)$$

となる．($\Leftarrow$) は Condensation Lemma の (2) より明らか．

($\Rightarrow$) については α が実数であることより $\alpha \subseteq L_\omega$ なので Condensation Lemma の (3) よりある可算順序数 ζ について $\alpha \in L_\zeta$ になる．

条件 $(*)$ をコーディングにより「ある実数が存在して」という形に変形することで定理を証明する．

まず Mostowski の崩壊定理より $\mathcal{L}^\in$ 構造 (M, E) に対して

$$(M, E) \text{ がある推移的な } (A, \in) \text{ と同型} \iff E \text{ は well-founded かつ } (M, E) \text{ が外延性公理をみたす}$$

が成り立つことに注意．よって，

$$\begin{aligned} \alpha \in L \iff &\text{可算で well-founded な構造 } (M, E) \text{ が存在して} \\ &(M, E) \text{ は外延性公理を満たし } (M, E) \models T_L \text{ かつ } \alpha \in \overline{M} \end{aligned}$$

が言える．ここに $\overline{M}$ は M の推移的崩壊．

最後の条件 $\alpha \in \overline{M}$ を言い換えよう．α に関する条件 $\alpha \in \mathcal{N}$ は Δ_0 概念だったことを思い出し，論理式 $\varphi_0(\alpha)$ を任意の推移的モデル M で $\alpha \in M$ なものに対して

$$\alpha \in \mathcal{N} \iff M \models \varphi_0(\alpha)$$

なものとする．また，各 $m, n \in \omega$ ごとに

$$\alpha(m) = n$$

を表現する Δ_0 論理式を $\psi_{m,n}(\alpha)$ とする (ただし，これは集合論の内部で定義された論理式である)．

このとき $\alpha \in \overline{M}$ という条件は

$$(\exists a \in M)((M, E) \models \varphi_0(a) \wedge (\forall m, n \in \omega)(\alpha(m) = n \iff (M, E) \models \psi_{m,n}(a)))$$

と書き直せる．

したがって，

$$\begin{aligned}\alpha \in L \iff & \text{可算で well-founded な構造 } (M, E) \text{ が存在して} \\ & (M, E) \text{ は外延性公理を満たし } (M, E) \models T_L \text{ かつ} \\ & (\exists a \in M)((M, E) \models \varphi_0(a) \wedge (\forall m, n \in \omega)(\alpha(m) = n \iff (M, E) \models \psi_{m,n}(a))).\end{aligned}$$

ここから可算構造を一つの実数によりコードする．実数 $\beta \in \mathcal{N}$ によってコードされる可算構造 (M_β, E_β) はユニバースが

$$M_\beta = \{t \in \omega \mid \beta(2t) = 1\}$$

であり，$\in$ の解釈が，

$$E_\beta = \{(t, s) \in M_\beta^2 \mid \beta(2\langle t, s\rangle + 1) = 1\}$$

なものとする．

ここで $\langle k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}\rangle$ で自然数の列 $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ を一つの自然数にコードしたものを表す．逆に自然数 a が自然数列のコードをしているときその i 番目を $(a)_i$ で書く．ただし a が列のコードでないときや，長さ i 以下の列をコードしているときには $(a)_i = 0$ と定める．

このとき論理式の自然数へのコード化を適当に定めれば，$\mathcal{N} \times \omega \times \omega$ 上の関係

$$\mathrm{Sat}(\beta, m, a) \iff (M_\beta, E_\beta), (a)_0, (a)_1, \ldots \models \varphi_m$$

が Δ^1_1 で定義できる．ここに φ_m は自然数 m がコードする論理式．また $(M_\beta, E_\beta), (a)_0, (a)_1, \ldots \models \varphi_m$ という式は構造 (M_β, E_β) において論理式 φ_m が，i 番目の変数を $(a)_i$ に割り当てるという割り当てのもとで成り立つと読む．ただし，$(a)_i \notin M_\beta$ なる $i < \mathrm{lh}(a)$ がある場合は $\mathrm{Sat}(\beta, m, a)$ は偽とする．

$f : \omega^2 \to \omega$ を

$$f(m, n) = (\text{論理式 } \psi_{m,n}(x) \text{ のコード})$$

で定義する．

また，T_L の文と外延性公理をすべて "かつ" でつないだ文のコードを k_0, 論理式 $\varphi_0(x)$ のコードを k_1 とする．また $\varphi_0(\alpha)$ と $\psi_{m,n}(\alpha)$ の自由変数は 0 番目の変数だと仮定する．

以上より実数 $\alpha \in \mathcal{N}$ に対して次が成立する:

$$\begin{aligned}\alpha \in L \iff (\exists \beta \in \mathcal{N})\Big\{ & \mathrm{Sat}(\beta, k_0, \langle\rangle) \\ & \wedge E_\beta \text{ は well-founded} \\ & \wedge (\exists a \in \omega)\big[\mathrm{Sat}(\beta, k_1, \langle a\rangle) \\ & \qquad \wedge (\forall m, n \in \omega)[\alpha(m) = n \iff \mathrm{Sat}(\beta, f(m, n), \langle a\rangle)]\big]\Big\}\end{aligned}$$

E_β の well-foundedness が Π^1_1 で書けることに注意すると，これは $\alpha \in L$ が Σ^1_2 で書けたことになる．よって，$\mathcal{N} \cap L$ は Σ^1_2.

2 について．L の標準的な整列順序 $\leqslant_L$ はある ZF の有限集合 T_1 のすべてのモデルで絶対的であったので，それを定義する論理式を $\psi_L(v_0, v_1)$ とする．

T_1 と T_L と外延性公理を含む ZF の有限部分集合を S_L とする．

各 L_α が L の整列順序で始切片になっていることと Mostowski の崩壊定理を使うと $\alpha \in \mathcal{N} \cap L$ と任意の $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ に対して次が分かる．

$$
\begin{aligned}
&(\forall \beta \in \mathcal{N} \cap L)(\beta \leqslant_L \alpha \Rightarrow P(\beta, x)) \\
&\iff \text{可算で well-founded な構造 } (M, E) \models S_L \text{ と } a \in M \text{ が存在して} \\
&\qquad (M, E) \models \varphi_0(a) \text{ かつ } (\forall m, n \in \omega)(\alpha(m) = n \iff (M, E) \models \psi_{m,n}(a)) \\
&\qquad \text{かつ } (\forall b \in M)\{(M, E) \models \varphi_0(b) \wedge \psi_L(b, a) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow (\exists \beta \in \mathcal{N})[(\forall m, n \in \omega)(\beta(m) = n \iff (M, E) \models \psi_{m,n}(b)) \wedge P(\beta, x)]\}
\end{aligned}
$$

ここでもし，P が Σ^1_2 ならば，右辺は可算構造を実数でコーディングすることで Σ^1_2 な条件となる．

3 について．$\mathcal{N} \subseteq L$ のとき $\leqslant_L$ の $\mathcal{N}$ への制限が順序型 ω_1 になることを言えばよい．今，$|\mathcal{N}| = \aleph_1$ なので順序型が ω_1 以上なのはよい．また各実数はある L_ξ (ξ は可算順序数) に属するから，それより前にある L の元は可算個である (L_ξ が始切片で $|L_\xi| = |\xi|$ より)．よって順序型は ω_1 以下である． □

注意. $\mathcal{N} \subseteq L$ のとき L の整列順序の $\mathcal{N}$ への制限は Σ^1_2-good であるが，これは $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の部分集合として Δ^1_2 になっている．実際，

$$
\begin{aligned}
\gamma \leqslant_L \alpha &\iff (\exists \beta \in \mathcal{N})(\beta \leqslant_L \alpha \wedge \beta = \gamma) \\
\neg(\gamma \leqslant_L \alpha) &\iff \gamma \neq \alpha \wedge \alpha \leqslant_L \gamma
\end{aligned}
$$

なので関係 $=$ は Σ^1_2 なことを考えれば，Σ^1_2-goodness より $\leqslant_L$ は Δ^1_2 である．

5 Lebesgue 可測性と Baire の性質がのらないことの証明

次の定理は証明なしで使う．

事実 4 (Fubini の定理)**.** X を位相空間，μ を X 上の σ-有限ボレル測度とする．$A \subseteq X \times X$ が積測度 $\mu \times \mu$ において可測だとする．このとき次の 2 つが成立する．

1. A の切り口
$$A^y = \{x \mid A(x, y)\}$$
はほとんどすべての $y \in X$ で可測である．
2.
$$
\begin{aligned}
A \text{ が測度 } 0 &\iff \text{ほとんどすべての } y \in X \text{ について } A^y \text{ が測度 } 0 \\
&\iff \text{ほとんどすべての } x \in X \text{ について } A_x = \{y \mid A(x, y)\} \text{ が測度 } 0
\end{aligned}
$$

定理 5. 位相空間 X に連続な確率ボレル測度が定義されているとする．$\rho : X \to \mathrm{ON}$ とし，各 $\xi \in \mathrm{ON}$ に対し，$\rho^{-1}\{\xi\}$ は測度 0 だとする．このとき ρ によって誘導される prewellordering は非可測である．

証明. $A = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x) \leqslant \rho(y)\}$ とおく．示すべきことは A が非可測であることである．A が可測だと仮定する．すると Fubini の定理より A^y はほとんどすべての y で可測．

まず，A が測度 0 であるときを考える．$f : X \times X \to X \times X; (x, y) \mapsto (y, x)$ は測度を保つ写像なので $A' = \{(x, y) \mid \rho(x) \geqslant \rho(y)\}$ も測度 0 である．よって $X \times X$ も測度 0 となるが全体の測度は 1 だったので矛盾．

次に，A が測度 0 でないときを考える．すると Fubini の定理より，$\{y \in X \mid A^y$ が測度 $0\}$ が測度 1 ではない．

よって y_0 を A^{y_0} が可測だが測度 0 でないようなものの最小の一つとする．

$$B = \{(x, y) \in X \mid \rho(x) \leqslant \rho(y) < \rho(y_0)\}$$

とおくと，$B = A \cap (X \times A^{y_0})$ なので B は可測である．

今 y_0 の選び方より，$C = \{y \in X \mid B^y$ の測度が $0\}$ とおくと C の測度は 1。よって，Fubini の定理より B は測度 0 である．

他方で，各 $x \in C$ で $x \leqslant y_0$ なもの (つまり $x \in C \cap A_{y_0}$) について

$$A^{y_0} \subseteq B^x \cup B_x \cup \{y \mid \rho(y) = \rho(y_0)\}$$

となり，B_x は測度 0 にできない．なぜなら，ある $x \in C \cap A_{y_0}$ について B_x が測度 0 だとすると右辺の 3 つの集合はどれも測度 0 となって A^{y_0} も測度 0 となってしまうからである．ここに各 $\rho^{-1}\{\alpha\}$ が測度 0 という仮定を使った．

以上より，B は測度 0 だが，測度 0 でない x の集合 $C \cap A^{y_0}$ 上で B_x は測度 0 でない．これは Fubini の定理に反する． □

Fubini の定理のカテゴリー版が存在し，それを Kuratowski–Ulam の定理という．それを使えば同様の議論で次も示せる:

定理 6. X をポーランド空間とする．$\rho : X \to \mathrm{ON}$ とし，各 $\xi \in \mathrm{ON}$ に対し，$\rho^{-1}\{\xi\}$ は meager だとする．このとき ρ によって誘導される prewellordering は Baire の性質をもたない．

定理 5 と定理 6 の系として次を得る．

系 7. $\mathcal{N} \subseteq L$ ならば $\leqslant_L$ の $\mathcal{N}$ への制限は Δ^1_2 かつ Lebesgue 可測性も Baire の性質も持たない．

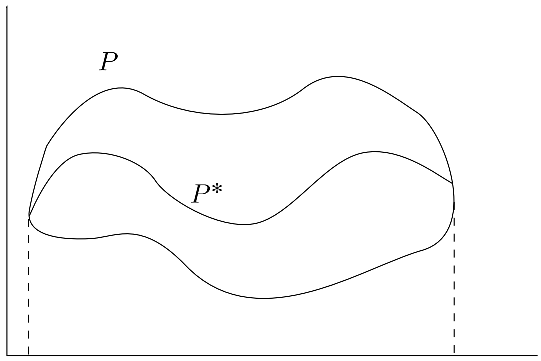
6　記述集合論からの準備

この節では，完全集合の性質をもたない Π^1_1 集合の存在の証明を行うために必要な記述集合論からの準備をする．具体的には uniformization の概念と整列集合のコーディングの全体 WO の性質を見る．

$P \subseteq X \times Y$ とする．P^* が P を **uniformize する**とは，$P^* \subseteq P$ かつ P^* は X から Y へのある関数のグラフであり，その定義域は P の第 1 成分への射影:

$$\exists^Y P = \{x \in X \mid (\exists y \in Y) P(x, y)\}$$

になっているものである．



事実 8 (Novikov–Kondo–Addison)**.** 任意の Π^1_1 集合はある Π^1_1 集合により uniformize される．

各実数 $\alpha \in \mathcal{N}$ に対して

$$\leqslant_\alpha = \{(m, n) \in \omega^2 \mid \alpha(\langle m, n\rangle) = 1\}$$

とおく．$\leqslant_\alpha$ が整列順序となるような $\alpha \in \mathcal{N}$ 全体を WO と書く．$\alpha \in \mathrm{WO}$ に対して，

$$|\alpha| = \text{order type of } \leqslant_\alpha$$

とおく．

事実 9. X は type 1 の空間とする．

1. WO は Π^1_1 集合．
2. $\leqslant_\Pi, \leqslant_\Sigma$ というそれぞれ Π^1_1, Σ^1_1 な関係が存在して，

$$\beta \in \mathrm{WO} \Rightarrow [\alpha \leqslant_\Pi \beta \iff \alpha \leqslant_\Sigma \beta \iff (\alpha \in \mathrm{WO} \wedge |\alpha| \leqslant |\beta|)]$$

3. $P \subseteq X$ が Π^1_1 集合ならば，recursive な写像 $f : X \to \mathcal{N}$ が存在して

$$P(x) \iff f(x) \in \mathrm{WO}$$

が成り立つ．

4. 同様に $P \subseteq X$ が $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ 集合ならば，Borel 写像 $f : X \to \mathcal{N}$ が存在して

$$P(x) \iff f(x) \in \mathrm{WO}.$$

このとき

$$\sup\{|f(x)| \mid P(x)\} < \omega_1$$

となる．

命題 10. A が WO の部分集合でかつ $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ ならば，可算順序数 ξ が存在して

$$\alpha \in A \Rightarrow |\alpha| < \xi.$$

証明．そうでないとする．$\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ な $P \subseteq X$ を任意にとる．すると Borel 関数 f があり，

$$P(x) \iff f(x) \in \mathrm{WO}.$$

すると背理法の仮定より

$$P(x) \iff (\exists \alpha)[\alpha \in A \wedge f(x) \leqslant_\Sigma \alpha]$$

となり P は $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1$ になってしまう．これは $\underset{\sim}{\mathbf{\Delta}}^1_1 \subsetneq \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ に矛盾． □

7　完全集合の性質をもたない Π^1_1 集合の存在の証明

定義 11. $A \subseteq X$ が **thin** とは，A が空でない完全集合を含まないことである．

定理 12. $\mathcal{N} \subseteq L$ とする．このとき，$f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^2$ が存在し，そのグラフ

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(\alpha, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^2 \mid f(\alpha) = y\}$$

は Π^1_1 かつ thin である．

証明．$P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ を

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) \iff & \alpha \leqslant_L \beta \wedge \beta \in \mathrm{WO} \wedge \\ & (\forall \gamma <_L \beta) \neg (\gamma \in \mathrm{WO} \wedge |\gamma| = |\beta|) \end{aligned}$$

で定義する．$P(\alpha, \beta)$ は「β が α より後ろにあり、かつ初めて登場する順序数をコードしている」と読める。

P は Σ^1_2 である (定理 3 と事実 9 より)．そこで

$$P(\alpha, \beta) \iff (\exists \gamma \in \mathcal{N}) Q(\alpha, \beta, \gamma)$$

で Q は Π^1_1 集合とする．Q を $\mathcal{N} \times \mathcal{N}^2$ の部分集合と考え，Q^* を Q を uniformize する Π^1_1 集合とする．
主張: Q^* が定める関数は全域的である．
$\because$) $\alpha \in \mathcal{N}$ に対し，$P(\alpha, \beta)$ が成り立つ β が必ず存在することを言えばよい．$P(\alpha, \beta)$ なる β が存在しなければ，実数によってコードされる可算順序数が可算個しかないことになってしまい矛盾． //
主張: Q^* は thin である．
$\because$) thin でないとする．$A \subseteq Q^*$ を非空な完全集合とする．A は

$$A = \{(\alpha, \beta_\alpha, \gamma_\alpha) \mid \alpha \in A'\}$$

の形をしている．$\alpha \in A'$ ならば当然，$P(\alpha, \beta_\alpha)$ である．$\leqslant_L$ の $\mathcal{N}$ への制限の順序型が ω_1 だったので，写像 $p_2 : \alpha \mapsto \beta_\alpha$ による一点の逆像は可算である．したがって，p_2 による A' の像 p_2“$A = \{\beta_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ は非可算である．よってそのメンバーがコードする順序数は ω_1 の中で unbounded．($\alpha \in A'$ について $P(\alpha, \beta_\alpha)$ が成り立っていることと P の定義より p_2“A の各元は異なる順序数をコードしていることに注意する．)

一方で，p_2“A は閉集合の射影なので $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ 集合である．よって，命題 10 よりそのメンバーがコードする順序数は ω_1 の中で bound される．これは矛盾． //

$\square$

系 13. $\mathcal{N} \subseteq L$ ならば $\mathcal{N}$ の Π^1_1 部分集合 A が存在して A は完全集合の性質を持たない．

これで定理 1 が証明された．

参考文献

[1] Y.N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2009.