

# HF 上の $\Delta_1$ 関係と recursive の同値性

後藤達哉 (筑波大学理工学群数学類 4 年)

2019 年 10 月 21 日

**命題 1.**  $f: \omega^k \rightarrow \omega$  を部分再帰的関数とする。このとき  $f$  は  $\omega^{k+1}$  の部分集合であるが、これは HF 上  $\Sigma_1$  である。

証明. まず初期関数について示す。

zero について: これは論理式  $\varphi(y) \equiv y = 0$  で定義されるのでよい。

射影  $I_1^*$  について: これは論理式  $\varphi(\vec{x}, y) \equiv \bigwedge_{j < k} (x_j \in \omega) \wedge y = x_i$  で定義されるのでよい。

後続者 succ について: これは論理式  $\varphi(x, y) \equiv x \in \omega \wedge y = S(x)$  で定義されるのでよい。

次に HF 上  $\Sigma_1$  な  $\omega$  上の部分関数が合成・原始再帰・最小化で閉じることを示す。

合成について: 関数  $g_0, \dots, g_{k-1}, h$  が論理式  $\psi_0, \dots, \psi_{k-1}, \theta$  で定義されるとする。このとき合成関数

$$f(\vec{x}) \simeq h(g_0(\vec{x}), \dots, g_{k-1}(\vec{x}))$$

は論理式

$$\varphi(\vec{x}, y) \equiv (\exists a_0) \dots (\exists a_{k-1}) (\theta(a_0, \dots, a_{k-1}, y) \wedge \psi_0(\vec{x}, a_0) \wedge \dots \wedge \psi_{k-1}(\vec{x}, a_{k-1}))$$

で定義される。よってよい。

原始再帰について: 関数  $g, h$  が論理式  $\psi, \theta$  で定義されるとする。このとき次の原始再帰で定義される  $f$  を考える:

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &\simeq g(\vec{x}), \\ f(n+1, \vec{x}) &\simeq h(n, \vec{x}, f(n, \vec{x})). \end{aligned}$$

すると  $f$  は論理式

$$\varphi(n, \vec{x}, y) \equiv (\exists w) (w : n+1 \rightarrow \omega \wedge \psi(\vec{x}, w(0)) \wedge (\forall i < n) (\theta(i, \vec{x}, w(i), w(i+1)))) \wedge y = w(n))$$

で定義される。よってよい。

最小化について: 関数  $g$  が論理式  $\psi$  で定義されるとする。このとき次の最小化で定義される  $f$  を考える:

$$f(\vec{x}) \simeq (\mu z) g(\vec{x}, z).$$

すると  $f$  は論理式

$$\varphi(\vec{x}, y) \equiv \psi(\vec{x}, y, 0) \wedge (\forall z < y) (\exists n) (n \neq 0 \wedge \psi(\vec{x}, z, n))$$

で定義される。よってよい。 □

系 2.  $A \subseteq \omega^k$  について  $A$  が recursively enumerable ならば,  $A$  は HF 上  $\Sigma_1$ .

証明.  $A$  が recursively enumerable ならある recursive な関数  $f$  があって

$$A = \{\vec{x} \in \omega^k \mid (\exists y \in \omega) f(\vec{x}, y) = 1\}$$

となる.  $f$  を定義する  $\Sigma_1$  論理式  $\psi$  をとれば論理式

$$\varphi(\vec{x}) \equiv (\exists y) \psi(\vec{x}, y, 1)$$

により  $A$  は定義される. □

逆を示すために次が重要になる.

補題 3.  $\omega$  上の二項関係  $E$  を

$$nEm \iff m \text{ の二進展開の下から } n \text{ 桁目が } 1$$

と定める. そして再帰で  $\chi: \omega \rightarrow \text{HF}$  を

$$\chi(m) = \{\chi(n) \mid nEm\}$$

とおく. このとき

1.  $E$  は recursive.
2.  $\chi: (\omega, E) \rightarrow (\text{HF}, \in)$  は同型写像.
3.  $\chi$  の逆写像  $\chi^{-1}$  の  $\omega$  への制限は recursive.

証明. 1 は明らか. 2 と 3 を示す.  $\Gamma: \text{HF} \rightarrow \omega$  を次で再帰的に定める:

$$\Gamma(a) = \sum_{b \in a} 2^{\Gamma(b)}.$$

このとき  $\Gamma$  が  $\chi$  の逆写像になっていること, すなわち  $\Gamma \circ \chi = \text{id}_\omega, \chi \circ \Gamma = \text{id}_{\text{HF}}$  がそれぞれ関係  $E$  と  $\in$  に関する帰納法で証明できる. すると  $\chi$  が同型になっていることは定義より容易にわかる.  $\Gamma$  の定義を見れば, これの  $\omega$  への制限が recursive なことも明らか. □

命題 4. どんな  $\Delta_0$  論理式  $\varphi$  に対してもある recursive な集合  $A$  があって任意の  $\vec{x} \in \omega$  について

$$\text{HF} \models \varphi(\chi(x_0), \dots, \chi(x_{k-1})) \iff (x_0, \dots, x_{k-1}) \in A$$

証明. 論理式の複雑さに関する帰納法.

論理式  $x = y$  については  $\{(x, y) \in \omega^2 \mid x = y\}$  でよい. 論理式  $x \in y$  については補題 3 の  $E$  でよい.

論理結合子の場合は明らか.

$\varphi \equiv (\exists y \in x_0)\psi(\vec{x}, y)$  のときは  $\psi$  に対する recursive な集合を  $B$  として,

$$A = \{(x_0, \dots, x_{k-1}) \in \omega^k \mid (\exists y < x_0)(yEx_0 \wedge (\vec{x}, y) \in B)\}$$

とすればよい. □

**命題 5.**  $A \subseteq \omega^k$  が HF 上  $\Sigma_1$  ならば,  $A$  は recursively enumerable である.

証明.  $A$  が論理式  $(\exists y)\varphi(\vec{x}, y)$  で定義されるとする. すると命題 4 より recursive な  $B$  がとれて

$$\text{HF} \models \varphi(\vec{x}, y) \iff (\chi^{-1}(x_0), \dots, \chi^{-1}(x_{k-1}), \chi^{-1}(y)) \in B$$

となる. よって,

$$(x_0, \dots, x_{k-1}) \in A \iff (\exists y \in \omega)((\chi^{-1}(x_0), \dots, \chi^{-1}(x_{k-1}), y) \in B)$$

となるので,  $A$  は recursively enumerable である. □

系 2 と命題 5 より次が得られる.

**定理 6.**  $A \subseteq \omega^k$  について, HF 上  $\Sigma_1$  であることと recursively enumerable であることは同値.

recursively enumerable かつ補集合が recursively enumerable であれば recursive であったのを思い出すと次の系を得る.

**系 7.**  $A \subseteq \omega^k$  について, HF 上  $\Delta_1$  であることと recursive であることは同値.

## 参考文献

- [1] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.