Vaught 予想と記述集合論

後藤 達哉
筑波大学理工学群数学類 3 年

2018/11/22

地図

Silver's Theorem 概略を示す

↓ 示さない

Descriptive Set Theory

Burgess' Theorem

↓ 概略を示す

Model Theory

Morley's Theorem

↑

Vaught Conjecture

1. Vaught 予想
2. 記述集合論の初歩
3. Burgess $\Rightarrow$ Morley の証明
4. Silver の定理
5. Silver の定理の証明

1. Vaught 予想
2. 記述集合論の初歩
3. Burgess $\Longrightarrow$ Morley の証明
4. Silver の定理
5. Silver の定理の証明

連続体仮説

- $\mathbb{N}$ の濃度を可算濃度といい $\aleph_0$ と書く
- $\aleph_0$ より真に大きい濃度で最小のものを $\aleph_1$ と書く
- $\aleph_1$ より真に大きい濃度で最小のものを $\aleph_2$ と書く
- $\vdots$
- $\mathbb{R}$ の濃度を連続体濃度といい $2^{\aleph_0}$ と書く

連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ は $\aleph_0$ より真に大きい．しかし通常の集合論 (ZFC) では $2^{\aleph_0}$ がどのくらいの大きさになるかはほとんど分からない．$\aleph_1$ かもしれないし，$\aleph_2$ かもしれないしもっと大きいかもしれない．

連続体仮説

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Vaught 予想

ある可算言語で書かれた一階の完全理論 T についてその可算モデルの同型類の数を $I(T,\aleph_0)$ とする．

Vaught 予想

このとき任意の理論 T について

$$I(T,\aleph_0) > \aleph_0 \Rightarrow I(T,\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$$

つまり，$I(T,\aleph_0)$ は連続体仮説の反例にはならないという主張．
よって連続体仮説が成立するならこの主張は自明に成り立つ．
なお，言語が可算で可算なモデルを考えているので $I(T,\aleph_0) \leq 2^{\aleph_0}$ はいつでも成り立つことに注意する．

Vaught 予想は未解決．だが…

Morley の定理

次が成立:

Morley の定理

$$I(T, \aleph_0) > \aleph_1 \Rightarrow I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$$

Morley の定理

次が成立:

Morley の定理

$$I(T, \aleph_0) > \aleph_1 \Rightarrow I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$$

Morley の定理は記述集合論の Burgess の定理から従う！

Burgess の定理

X をポーランド空間，$E \subset X \times X$ を X 上の $\underset{\sim}{\Sigma}_1^1$ 同値関係とする．少なくとも $\aleph_2$ 個の E 同値類があるとする．
このとき互いに E-inequivalent な元からなる X の完全集合が存在する．したがって同値類は $2^{\aleph_0}$ 個ある．

以降，「互いに E-inequivalent な元からなる X の完全集合が存在する」という主張を「完全個の同値類がある」と表現する．

1. Vaught 予想
2. **記述集合論の初歩**
3. Burgess $\Longrightarrow$ Morley の証明
4. Silver の定理
5. Silver の定理の証明

ポーランド空間

定義

完備距離付け可能な可分位相空間をポーランド空間という．孤立点を持たない位相空間を完全であるという．ポーランド空間の部分集合についてそれが閉かつ孤立点を持たないとき完全集合という．

例

$\mathbb{R}$ (**実数全体**), $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Baire **空間**), $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ (Cantor **空間**) **は完全ポーランド空間**

ポーランド空間の濃度

事実

任意のポーランド空間 X について $\mathcal{N}$ から X への連続全射が存在する．

とくに，ポーランド空間の濃度は高々 $2^{\aleph_0}$ である．

事実

任意の非可算ポーランド空間 X について $\mathcal{C}$ から X への連続単射が存在する．

とくに，非可算ポーランド空間の濃度は $2^{\aleph_0}$ である．

$\Sigma^1_1, \Pi^1_1, \Delta^1_1$ の定義

- $a \in \mathcal{N}$ に対し，$\mathcal{N}$ の部分集合 A が $\Sigma^1_1(a)$ であるとはある計算可能述語 R があって

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid \exists y \in \mathcal{N}, \forall n \in \mathbb{N}, R(x \upharpoonright n, y \upharpoonright n, a \upharpoonright n)\}$$

  となること
- $\Pi^1_1(a)$ 集合は $\Sigma^1_1(a)$ 集合の補集合で書けるもののこと
- $\Delta^1_1(a) = \Sigma^1_1(a) \cap \Pi^1_1(a)$
- パラメータ a がないとき A は単に $\Sigma^1_1, \Pi^1_1, \Delta^1_1$ であるという

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^1_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^1_1$ の定義

次で定義

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^1_1(a),$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^1_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Pi^1_1(a),$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^1_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}^1_1 \cap \underset{\sim}{\boldsymbol{\Delta}}^1_1.$$

$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1, \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_1, \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1$ の定義

次で定義

$$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^1_1(a),$$
$$\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Pi^1_1(a),$$
$$\undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1 = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 \cap \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1.$$

これは次の定義と同値:

$$\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 = \left\{ A \subset \mathcal{N} \;\middle|\; \text{A は閉集合 } C \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N} \text{ の射影} \right\},$$
$$\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_1 = \{A^c \mid A \in \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1\},$$
$$\undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1 = \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1 \cap \undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1.$$

$\undertilde{\mathbf{\Delta}}^1_1$ は $\mathcal{N}$ のボレル集合全体と一致する.

1. Vaught 予想
2. 記述集合論の初歩
3. Burgess $\Rightarrow$ Morley の証明
4. Silver の定理
5. Silver の定理の証明

Burgess $\Rightarrow$ Morley の証明

- T を可算言語 $\mathcal{L}$ で書かれた完全理論とする．$\mathrm{Mod}(T)$ を宇宙を $\mathbb{N}$ とする T のモデル全体の集合とする．
- $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ とおく (各 c_i は新しい定数記号)．
- $\mathrm{Mod}(T)$ の元 $\mathcal{M}$ は c_i の解釈を $i \in \mathbb{N}$ とすることで自然に $\mathcal{L}^*$ 構造となる．

Burgess ⇒ Morley の証明

- Mod(T) に次の形の集合全体を開基とする位相を入れる．

$$B_\varphi = \{\, \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(T) \mid \mathcal{M} \models \varphi \,\} \quad (\varphi \text{ は } \mathcal{L}^*\text{-閉論理式})$$

- このとき Mod(T) はポーランド空間になる．
- しかもモデルの間の同型の関係は $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ になる．
- よって，Burgess の定理から Morley の定理が従う．

Burgess の定理 (再掲)

X をポーランド空間，$E \subset X \times X$ を X 上の $\underset{\sim}{\Sigma}^1_1$ 同値関係とする．少なくとも $\aleph_2$ 個の E 同値類があるとする．このとき完全個の E の同値類が存在する．

Morley の定理 (再掲)

T を可算言語で書かれた一階の完全理論とする．このとき $I(T, \aleph_0) > \aleph_1 \Rightarrow I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$

Burgess $\Rightarrow$ Morley の証明

Mod(T) がポーランド空間になることは次のようにして分かる．

$$f : \mathrm{Mod}(T) \to 2^S \quad (S \text{ は } \mathcal{L}^*\text{-文全体})$$

を次で定義:

$$f(\mathcal{M})(\varphi) = \begin{cases} 1 & (\mathcal{M} \models \varphi) \\ 0 & (\mathcal{M} \not\models \varphi) \end{cases}$$

このとき f は連続単射．また，逆写像 f^{-1} : range(f) $\to$ Mod(T) も連続となる．よって，Mod(T) は range(f) と同相で，これは 2^S の G_δ 集合なのでポーランド空間．

事実

ポーランド空間の G_δ 集合はポーランド空間である．

1. Vaught 予想
2. 記述集合論の初歩
3. Burgess $\Rightarrow$ Morley の証明
4. Silver の定理
5. Silver の定理の証明

Burgess の定理と Silver の定理

Burgess **の定理は次の** Silver **の定理を経由して証明される．**

Silver の定理

X をポーランド空間，$E \subset X \times X$ を X 上の $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 同値関係とする．少なくとも $\aleph_1$ 個の E 同値類があるとする．
このとき E は完全個の同値類を持つ．

Silver の定理 $\Rightarrow$ Burgess の定理

今回の発表では省略する．

1. Vaught 予想
2. 記述集合論の初歩
3. Burgess $\Rightarrow$ Morley の証明
4. Silver の定理
5. Silver の定理の証明

準備: Baire の性質

- 位相空間 X の部分集合 A が **nowhere dense** とは $\bar{A}^{\circ} = \varnothing$ を満たすことをいう
- 位相空間 X の部分集合 A が **meager** とは nowhere dense 集合の可算和で書けることをいう
- 位相空間 X が **Baire Category Theorem (BCT)** を満たすとは，任意の非空開集合が nonmeager なときをいう
- 位相空間 X の部分集合 A が **Baire の性質を持つ**とは，開集合 G があって対称差 $A \triangle G$ が meager となるときをいう

Key Lemma

補題

$E \subset \mathcal{N}^2$: **同値関係** on $\mathcal{N}$ **と非空開集合** $U \subset \mathcal{N}$ **について** $E \cap (U \times U)$ **が** meager **なら** E **には完全個の同値類がある**

Gandy 位相

- $\mathcal{N}^k$ の Σ^1_1 集合をすべて開集合とする最小の位相を Gandy 位相といい，その開集合系を τ^k_G と書く
- $\mathcal{N}^{k+l}$ に入る $(\mathcal{N}^l, \tau^l_G)$ と $(\mathcal{N}^k, \tau^k_G)$ との直積位相を $\tau^{k,l}_G$ と書く
- $\tau^{k,l}_G$ は τ^{k+l}_G より真に弱い位相である

Silver の定理の証明の流れ

$X = \mathcal{N}$ と仮定してもよい．なぜなら，

事実

任意の非可算ポーランド空間は $\mathcal{N}$ と *Borel* 同型．

また E が $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ であるという仮定の代わりに Π^1_1 であるという仮定のもとで示す．

1. Gandy 位相が BCT をみたすことを示す
2. 集合 H を定義してそれが非空 Σ^1_1 であることを示す
3. $E \cap (H \times H)$ が $\tau_G^{1,1}$-meager なことを示す
4. Key Lemma が Gandy 位相でも正しいことを示す

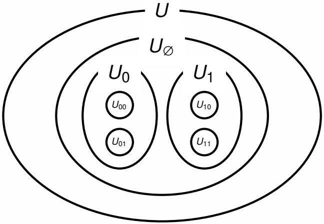
Key Lemma の証明

補題

$E \subset \mathcal{N}^2$: **同値関係** on $\mathcal{N}$ **と非空開集合** $U \subset \mathcal{N}$ **について** $E \cap (U \times U)$ **が** meager **なら** E **には完全個の同値類がある**

証明. $E \cap (U \times U)$ **が** meager **なので** $E \cap (U \times U) = \bigcup_n A_n$ **で** A_n **は** nowhere dense **なものをとれる.**
非空な基本 *clopen* **集合の族** $(U_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega})$ **を次を満たすよう構成する**:

1. $U_\varnothing \subset U$
2. $U_\tau \subsetneq U_\sigma$ for $\sigma \subsetneq \tau$
3. **もし** $|\sigma| = |\tau| = n$ **かつ** $\sigma \neq \tau$ **なら** $(U_\sigma \times U_\tau) \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = \varnothing$



Key Lemma の証明

補題

$E \subset \mathcal{N}^2$: **同値関係** on $\mathcal{N}$ **と非空開集合** $U \subset \mathcal{N}$ **について** $E \cap (U \times U)$ **が** meager **なら** E **には完全個の同値類がある**

- **この構成が終わったとする.**
- **すると** $f \in \mathcal{C}$ **に対して** $\bigcap_n U_{f \restriction n}$ **は一点集合になる.**
- **そこで** $\varphi(f) = (\bigcap_n U_{f \restriction n}$ **の元) とおくと** φ **は** $\mathcal{C}$ **から** $\mathcal{N}$ **への連続単射であり,** $f \neq g$ **なら** $\varphi(f) \not\mathrel{E} \varphi(g)$**.**
- **よって完全個の同値類が存在.** $\square$

Gandy 位相が BCT をみたすことの証明

省略

H を定義してそれが非空 Σ^1_1 であることを示す

- E を Π^1_1 同値関係とし，非可算個の同値類を持つとする．
- $A \subset \mathcal{N}$ が E-small とは，A がある E-同値類に含まれていることをいう．
- H を次で定義:

$$H = \{x \in \mathcal{N} \mid \nexists A : E\text{-small } \Sigma^1_1 \text{ set s.t. } x \in A\}$$

- Σ^1_1 集合は可算個で一方で同値類は非可算個だから $H \neq \varnothing$．
- H が Σ^1_1 なことは "Separation Theorem" や Δ^1_1 集合に対して自然数による符号化があることを使えばできる．

$E \cap (H \times H)$ は $\tau_G^{1,1}$-meager なことを示す

- E は $\tau_G^{1,1}$ で Baire の性質を持つ．(証明略)
- $E \cap (H \times H)$ を $\tau_G^{1,1}$-nonmeager だと仮定する．
- E が Baire の性質を持つから，非空な Σ_1^1 集合 $A, B \subset U$ があって，E は $\tau_G^{1,1}$-comeager in $A \times B$ となる．
- $$A_1 = \{(x_0, x_1) \in A \times A \mid x_0 \not\!E\, x_1\}$$
  とおく．
- $A \subset H$ が非空 Σ_1^1 なので H の定義より A は E-small でない．
- よって $A_1 \neq \emptyset$ である．また，A_1 は Σ_1^1 である．

$E \cap (H \times H)$ は $\tau_G^{1,1}$-meager なことを示す

- $i = 0, 1$ について

$$C_i = \{(x_0, x_1, y) \mid (x_0, x_1) \in A_1, y \in B, x_i \not\mathrel{E} y\}$$

とおく．

- E が $\tau_G^{1,1}$-comeager in $A \times B$ なことから，C_i が $\tau_G^{2,1}$-meager なことが導ける．
- $\tau_G^{2,1}$ が BCT をみたすので，

$$(x_0, x_1, y) \in (A_1 \times B) \setminus (C_0 \cup C_1)$$

がある．($A_1 \times B$ は非空 open で $C_0 \cup C_1$ は meager だから)

- ところが，すると $x_0 \mathrel{E} y$ かつ $x_1 \mathrel{E} y$ かつ $x_0 \not\mathrel{E} x_1$ なので E が同値関係なことに矛盾． □

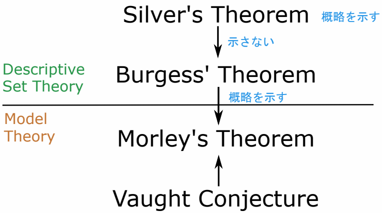
Key Lemma が Gandy 位相でも正しいことを示す

Key Lemma の Gandy 位相版

$E \subset \mathcal{N}^2$: **同値関係** on $\mathcal{N}$ **と非空** Σ^1_1 **集合** $U \subset \mathcal{N}$ **について**
$E \cap (U \times U)$ **が** $\tau^{1,1}_G$-meager **なら** E **には完全個の同値類がある**

省略.
Key Lemma **と同様の証明をすればよいが，** $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{f \restriction n}$ **が非空なことを保証するのに工夫が必要.**

まとめ



- Vaught **予想はモデル理論の連続体仮説である．それを弱めた** Morley **の定理は証明できる**
- **可算モデル全体にポーランド空間の構造を入れることで** Burgess **の定理から** Morley **の定理を導いた**
- Silver **の定理を示した**
    - Gandy **位相を導入**
    - **集合** H **を定義し，それが** Gandy **位相で非空** open **なことを示し，** $E \cap (H \times H)$ **が** Gandy **位相で** meager **なことを言った**
    - Key Lemma **と同様の証明で** E **が完全個の同値類を持つことが言える**

参考文献

- D. Marker. *Descriptive Set Theory*. 2002. http://homepages.math.uic.edu/~marker/math512/dst.pdf.
- 藤田 博司. 記述集合論ノート. 2004. http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/preprints/20040301.pdf.
- T. Jech. *Set Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- Y.N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2009.
- A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.