Perfect Set Theorem

筑波大学理工学群数学類 3 年 後藤達哉

2018 年 11 月 11 日

概要

連続体仮説とは可算濃度と連続体濃度の間に濃度は存在しないという命題である．これは現在では通常の集合論 (ZFC) からは証明も反証もできないことが知られている (Gödel&Cohen)．集合論の創始者 Cantor は連続体仮説は正しいと信じていた．その傍証として実数全体 $\mathbb{R}$ の閉集合では連続体仮説の反例が作れないことを示した (Cantor-Bendixson)．その後この結果は一般化され，$\mathbb{R}$ の Borel 集合では連続体仮説の反例は作れないこと (Alexandroff-Hausdorff)，$\mathbb{R}$ の解析集合でも反例が作れないこと (Suslin) が証明された．また $\mathbb{R}$ と書いた部分は任意の完全ポーランド空間に直しても成立する．この記事では Alexandroff-Hausdorff の結果を証明する．

目次

1 ポーランド空間 **1**
2 順序数 **3**
3 Cantor-Bendixson の定理 **5**
4 Alexandroff-Hausdorff の定理 **6**
5 Borel 階層と射影階層 **7**

1 ポーランド空間

定義 1.

1. 完備距離付け可能な可分位相空間をポーランド空間という．
2. 孤立点のない位相空間を完全な空間という．
3. 位相空間の孤立点のない閉集合を完全集合という．
4. 位相空間の部分集合であって可算個の開集合の共通部分で書ける集合を，その空間の G_δ 集合という．

注意 2. 距離空間では可分性は第二可算性と同値である．よってポーランド空間の定義の可分性は第二可算性といっても同じことである．特にポーランド空間の任意の部分空間は可分である．

例 3. $\mathbb{R}$ は完全ポーランド空間である．

定義 4. $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{x \mid x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ に直積位相を入れ (各 $\mathbb{N}$ は離散空間)，Baire 空間と呼ぶ．

$\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}} = \{x \mid x \colon \mathbb{N} \to 2\} \subset \mathcal{N}$ に $\mathcal{N}$ からの誘導位相を入れ Cantor 空間と呼ぶ．ただしここで $2 = \{0, 1\}$ である．

事実 5. $\mathcal{N}, \mathcal{C}$ は完全ポーランド空間．特にその完備な距離として

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ \dfrac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} \mid x(n) \neq y(n)\} + 1} & (x \neq y) \end{cases}$$

がとれる．

注意 6. d を位相空間 X の完備距離としたとき同じ位相を生成する有界かつ完備な距離がある:

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

命題 7. 二つのポーランド空間 X, Y の直和 $X \sqcup Y$ はポーランド空間．

証明. X, Y の完備距離 d_X, d_Y で $d_X < 1, d_Y < 1$ なものをとる．$X \sqcup Y$ 上の距離 d を次で定めればよい:

$$d(z,z') = \begin{cases} d_X(z,z') & (z,z' \in X) \\ d_Y(z,z') & (z,z' \in Y) \\ 2 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$ □

命題 8. 可算個のポーランド空間 X_i $(i \in \mathbb{N})$ の直積はポーランド空間．

証明. $d_i < 1$ を X_i の完備距離とする．このとき $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ の距離を

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

で定めればよい． □

命題 9. ポーランド空間の閉集合はポーランド空間．

証明. F をポーランド空間 X の閉集合とする．d を X の完備距離とする．このとき d の F への制限は完備である． □

命題 10. ポーランド空間の開集合はポーランド空間．

証明. U をポーランド空間 X の開集合とする．$d < 1$ を X の完備距離とする．このとき U 上の距離 $\hat{d}$ を

$$\hat{d}(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right|$$

と定義すればよい． □

命題 11. ポーランド空間の G_δ 集合はポーランド空間．

証明. A を X の G_δ 集合とすると $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ で各 U_i は開集合として書ける．

$$Y = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$$

とおくと Y はポーランド空間である．Y の対角線集合

$$\Delta = \{\, y \in Y \mid y(i) = y(j) \ (\text{for all } i, j \in \mathbb{N}) \,\}$$

を考えるとこれは Y の閉集合．よって Δ はポーランド空間である．対角写像

$$\begin{aligned} A &\to \Delta \\ x &\mapsto (x, x, x, \dots) \end{aligned}$$

を考えるとこれは同相写像．よって A もポーランド空間である． □

注意 12. 逆にポーランド空間 X の部分空間 A がポーランド空間なら A は X の G_δ 集合である．

事実 13. X をポーランド空間とする．このとき $\mathcal{N}$ から X への連続全射が存在する．

定義 14.

- $\{0,1\}$ の元を成分とする有限列を二進有限列という．
- $x \in \mathcal{C}$ に対して x の最初の n 項を取り出してできる二進有限列を $x \restriction n$ と書く．
- 二進有限列 τ, σ について τ が σ の延長であるとは σ の長さを n としたとき τ の長さが n 以上でかつ τ の最初の n 項が σ と一致することをいう．
- 二進有限列 τ, σ についてそれらが比較不能とはどちらも他方の延長になっていないことをいう．
- 二進有限列 σ に対して $b \in \{0,1\}$ を末尾に付け加えた二進有限列を $u^\frown b$ と書く．
- 距離空間の部分空間 A についてその直径を $\mathrm{diam}(A)$ と書く．

補題 15. X を空でない完全距離空間としたとき二進有限列から X の空でない開集合への対応 $\sigma \mapsto N_\sigma$ で次を満たすものが存在する:

1. τ が σ の延長のとき $N_\sigma \supset \bar{N}_\tau$.
2. σ と τ が比較不能なとき $\bar{N}_\sigma \cap \bar{N}_\tau = \varnothing$.
3. σ の長さを n としたとき $\mathrm{diam}(N_\sigma) < 2^{-n}$.

証明. σ の長さに関する帰納法で構成できる．N_σ が構成できたとして $N_{\sigma^\frown 0}$ と $N_{\sigma^\frown 1}$ を構成すればよい．実際，X は完全なので N_σ には 2 つ以上点が存在する．その 2 点の開近傍を条件 1,2,3 が成り立つようにとればよい (距離空間は T3 なので 1 と 2 を満たすようにとれる). □

定理 16. X を空でない完全完備距離空間とする．このとき $\mathcal{C}$ から X への連続単射が存在する．

証明. 上の補題の対応 $\sigma \mapsto N_\sigma$ を使う．$x \in \mathcal{C}$ に対して $f(x) \in X$ を次で定める:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (\text{a point in } N_{x \restriction n}).$$

このとき f は連続単射になる． □

2 順序数

定義 17 (整列集合)**.** 全順序集合 $(X, \leq)$ が整列集合であるとは，任意の空でない X の部分集合が最小元を持つことをいう．

例 18.

- 有限な全順序集合は整列集合である．濃度 n の整列集合は同型を除いて一意.

- $\mathbb{N}$ は整列集合.
- X, Y が整列集合のとき直和 $X \sqcup Y$ には整列集合の構造が入る．すなわち，X の元はどんな Y の元よりも小さいとし，X の元同士や Y の元同士の大小はもとの順序により順序を定める.
- X, Y が整列集合のとき直積 $X \times Y$ に辞書式で順序を入れると整列集合になる.

定義 19. $(X, \leq)$ が整列集合で $a \in X$ のとき $X(a) = \{x \in X \mid x < a\}$ を X の a 切片という．これも当然整列集合である.

事実 20 (比較定理)**.** X と Y を整列集合とする．このとき次のうちどれか一つが成り立つ:

- X と Y は順序同型.
- X は Y のある切片と順序同型.
- Y は X のある切片と順序同型.

定義 21 (順序数の古典的定義)**.**

- 整列集合全体の集合を順序同型で割ったときの同値類を順序数という.
- 整列集合 X, Y の同値類がそれぞれ α, β として，X が Y のある切片と順序同型であるとき $\alpha < \beta$ として順序数の間に順序を定める.

定義 22 (順序数の現代的定義)**.**

- 集合 A が推移的とは $x \in A$ ならば $x \subseteq A$ であることをいう.
- 集合 α が順序数であるとは，$(\alpha, \in)$ が整列集合であり，かつ推移的集合であるときをいう.
- 二つの順序数 α, β は $\alpha \in \beta$ であるとき $\alpha < \beta$ であるとして順序数の間に順序を定める.

事実 23. (現代的定義のもとで) 任意の整列集合はある一意的な順序数と順序同型．整列 X と同型な順序数を $\mathrm{type}(X)$ と書いて，X の整列型という.

例 24.

- $0 := \varnothing$ は順序数.
- $1 := \{0\} = \{\varnothing\}$ は順序数.
- $2 := \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ は順序数.
- $3 := \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ は順序数.

集合論的には自然数はこのように定義される.

定義 25.

- α が順序数なら $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数．これを α の次の順序数という.
- 何かしらの順序数の次の順序数になっているものを後続順序数といい，そうでない順序数を極限順序数という.
- $\mathrm{type}(\mathbb{N})$ を ω と書く.
- 順序数 α と β に対してその集合的直和 $\alpha \sqcup \beta$ に入る整列順序の整列型を $\alpha + \beta$ と書く.
- この記号のもとで $S(\alpha)$ と $\alpha + 1$ は一致するので以後 $S(\alpha)$ のことを $\alpha + 1$ と書く.

- 順序数 α と β に対してその集合的直積 $\alpha \times \beta$ に辞書式順序 (2 番目の成分を先に比較する) で入る整列順序の整列型を $\alpha\beta$ と書く．
- 集合として非可算な順序数のうち最小のものを ω_1 と書く．

事実 26 (超限帰納法)**.** 順序数 α に関する条件 $P(\alpha)$ について次が成り立っているとする:

- 任意の順序数 α について，$\beta < \alpha$ なるすべての順序数 β で $P(\beta)$ が成り立っていれば $P(\alpha)$ が成り立つ．

このとき任意の順序数について $P(\alpha)$ が成り立つ．

事実 27 (超限再帰)**.** 各順序数 α について集合 X_α を定義したいとき，次のことを行えばよい:

- 任意の順序数 α について，$\beta < \alpha$ なるすべての順序数 β で X_β がすでに定義されたとしてそれを使って X_α を定義する．

3　Cantor-Bendixson の定理

定理 28 (Cantor-Bendixson)**.** X をポーランド空間，F を X の非可算な閉集合とする．このとき空でない完全集合 $P \subseteq F$ が存在する．

これが証明されたら，ポーランド空間の非可算な閉集合は連続体濃度を持つことがわかる．なぜなら P が空でない完全ポーランド空間だから，定理 16 より $\mathcal{C}$ から P に単射があり P が連続体濃度を持つからである．

証明. 閉集合 A に対して導集合 A' を次で定める:

$$A' = \{\, x \in A \mid x \text{ は } A \text{ の集積点} \,\}.$$

そして順序数に関する再帰により

$$\begin{aligned} F_0 &= F, \\ F_{\alpha+1} &= (F_\alpha)', \\ F_\gamma &= \bigcap_{\alpha<\gamma} F_\alpha \quad (\gamma \text{ は極限順序数}) \end{aligned}$$

と定義する．

ここで，次の補題を用いる．

補題. 列 $\{F_\alpha\}_\alpha$ はある可算順序数で停留する．

証明. X は第二可算なので，可算の開基 $\{U_n\}_n$ が存在する．

$$A_\alpha = \{\, n \in \mathbb{N} \mid U_n \cap F_\alpha = \varnothing \,\}$$

とおく．すると $\alpha \leq \beta \Rightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta$ である．もし，$A_\alpha \subsetneq A_{\alpha+1}$ が全ての可算順序数 α について成り立つとする．$f\colon \omega_1 \to \mathbb{N}$ を次で定める．$f(\alpha)$ を $n \in A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$ となる最小の自然数 n とする．このとき $f\colon \omega_1 \to \mathbb{N}$ が単射となって ω_1 の定義に矛盾．よって，ある $\alpha_0 < \omega_1$ があって，$A_{\alpha_0} = A_{\alpha_0+1}$ となる．従って，$F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}$ となり列 $\{F_\alpha\}_\alpha$ は α_0 で止まる．　□

そこでこの α_0 を使い，$F_\infty = F_{\alpha_0}$ とおく．

一般に第二可算な空間の孤立点は可算個なので各 α について $F_\alpha \setminus F_{\alpha+1}$ は可算集合．可算集合の可算和は可算集合なので，$F \setminus F_\infty$ は可算集合である．

一方で F は非可算集合であったから，F_∞ は空でない．また作り方より明らかに F_∞ は F の完全集合である． □

4 Alexandroff-Hausdorff の定理

定義 29.

- X を集合とする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X の σ 加法族であるとは $\mathcal{F}$ が可算個の和集合と補集合で閉じているときをいう．
- X を位相空間とする．X の開集合をすべて含む最小の σ 加法族を X の Borel 集合族といい，X の Borel 集合族のメンバーを X の Borel 集合という．

補題 30. (X, τ) をポーランド空間とし，$F \subseteq X$ を閉集合とする．このとき X 上のポーランドな位相 τ_1 であって τ を含み，F を τ_1 上の clopen 集合にし，かつ τ と同じ Borel 集合族を持つものがある．

証明. $X \setminus F$ と F はともにポーランドな位相を持つ．τ_1 を $X \setminus F$ と F の disjoint union 上のポーランド位相とする (命題 7)．このとき F は τ_1 上で clopen である．さらに，τ_1 の開集合は τ の Borel 集合になることが容易にわかるので，τ と τ_1 は同じ Borel 集合族を持つ． □

補題 31. (X, τ) をポーランド空間とし，$B \subseteq X$ を Borel 集合とする．このとき X 上のポーランドな位相 τ_1 であって τ を含み，B を τ_1 上の clopen 集合にし，かつ τ と同じ Borel 集合族を持つものがある．

証明. X の Borel 集合全体を $\mathcal{B}(X)$ と書く．

$$\Omega = \left\{ B \in \mathcal{B}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} X \text{ 上の } \tau \text{ を含むポーランド位相 } \tau^* \text{ が存在して } B \text{ を } \tau^* \text{ の clopen 集合にし，} \\ \text{かつ } \tau \text{ と同じ Borel 集合族を持つ} \end{array} \right\}$$

とおく．前の補題より B が閉集合なら $B \in \Omega$ である．また Ω は補集合で閉じている．

主張. Ω は可算個の共通部分で閉じている．

証明. $A_0, A_1, \dots \in \Omega$ とし $B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ とする．τ_i を X 上のポーランド位相で A_i を clopen にし，τ と同じ Borel 集合族を持つものとする．

すると直積 $\prod_{i \in \mathbb{N}} (X, \tau_i)$ はポーランド空間である．$j \colon X \to \prod_{i \in \mathbb{N}} (X, \tau_i)$ を対角埋め込み写像 $j(x) = (x, x, x, \dots)$ とする．j によって誘導される X の位相を τ^* とする．このとき，$j \colon (X, \tau^*) \to j(X)$ は同相写像であり，$j(X)$ は $\prod_{i \in \mathbb{N}} (X, \tau_i)$ の閉集合なので τ^* は X のポーランド位相である．

$\prod_{i \in \mathbb{N}} (X, \tau_i)$ の部分集合 $\{ f \in \prod_{i \in \mathbb{N}} (X, \tau_i) \mid f(i) \in A_i \}$ は clopen 集合であるので，その j による引き戻し A_i も τ^* で clopen である．よって B は τ^* で closed．補題 30 より位相 τ^{**} が存在して B は clopen になる．

τ^{**} が τ と同じ Borel 集合族ともつことは容易にわかる．τ^{**} が求めるべき位相である． □

以上より，Ω は σ 加法族である．したがって $\Omega = \mathcal{B}(X)$． □

定理 32 (Alexandroff-Hausdorff)**.** X がポーランド空間で $B \subseteq X$ が非可算 Borel 集合なら B は空ではない完全集合を含む.

証明. τ を X の位相とする．補題 31 より τ より強い位相 τ_1 で B が閉集合なものがあって，τ_1 はポーランドかつ τ と同じ Borel 集合族を持つ．B は非可算なので Cantor-Bendixson の定理より τ_1 で完全な $P \subseteq B$ と同相 $f\colon \mathcal{C} \to P$ がある．τ_1 は τ より強いので f は位相 τ でも連続である．$\mathcal{C}$ はコンパクトなので P は τ で閉集合．P は τ_1 で孤立点を持たないので τ でもそうである．よって P は B の完全集合である． □

5 Borel 階層と射影階層

定義 33. X をポーランド空間とする．

$\alpha < \omega_1$ について $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X), \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X), \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) \subset \mathcal{P}(X)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^0_1(X) &= (X \text{ の開集合全体}),\\
\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) &= \left\{\, A^c \;\middle|\; A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \,\right\},\\
\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X) &= \left\{\, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \;\middle|\; A_i \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \,\right\},\\
\mathbf{\Sigma}^0_\gamma(X) &= \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \quad (\gamma \text{ が極限順序数のとき}),\\
\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) &= \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).
\end{aligned}$$

定義 34. X をポーランド空間とする．

自然数 n について $\mathbf{\Sigma}^1_n(X), \mathbf{\Pi}^1_n(X) \subset \mathcal{P}(X)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^1_1(X) &= \{\, A \subset X \mid A \text{ は閉集合 } C \subset X \times \mathcal{N} \text{ の射影} \,\},\\
\mathbf{\Pi}^1_n(X) &= \left\{\, A^c \;\middle|\; A \in \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \,\right\},\\
\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X) &= \left\{\, A \subset X \;\middle|\; A \text{ は } B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}) \text{ の射影} \,\right\},\\
\mathbf{\Delta}^1_n(X) &= \mathbf{\Sigma}^1_n(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_n(X).
\end{aligned}$$

このとき Borel 集合全体 $\mathcal{B}(X)$ は $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Delta}^1_1(X)$ となる．

X が非可算ポーランド空間なら次の真の包含が成立:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbf{\Sigma}^0_1 \arrow[dr, hook, "\neq"] & & \mathbf{\Sigma}^0_2 \arrow[dr, hook, "\neq"] & & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \arrow[dr, hook, "\neq"] & & & \mathbf{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, hook, "\neq"] & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \mathbf{\Delta}^0_2 \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \cdots & \mathbf{\Delta}^0_\alpha \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \cdots & \mathbf{\Delta}^1_1 = \mathcal{B} \arrow[ur, hook, "\neq"] \arrow[dr, hook, "\neq"'] & & \cdots \\
& \mathbf{\Pi}^0_1 \arrow[ur, hook, "\neq"'] & & \mathbf{\Pi}^0_2 \arrow[ur, hook, "\neq"'] & & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha \arrow[ur, hook, "\neq"'] & & & \mathbf{\Pi}^1_1 \arrow[ur, hook, "\neq"'] &
\end{tikzcd}$$

Borel 階層　　　　射影階層

注意 35.

- 上で見てきた通り非可算 Borel 集合は必ず完全集合を含む.
- 証明はしなかったが，実は非可算 $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ 集合も必ず完全集合を含む (Suslin).
- $\mathcal{N}$ が Gödel の構成可能宇宙に入っていることを仮定すると，非可算な $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$ 集合で完全集合を含まないものが存在する.
- 可測基数の存在を仮定すると非可算 $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ 集合は必ず完全集合を含む (Solovay).
- ZFC+(到達不能基数の存在) が無矛盾ならば ZFC+(すべての非可算射影集合は完全集合をもつ) も無矛盾である (Solovay).

参考文献

[1] Yiannis N. Moschovakis (2009) “Descriptive Set Theory” American Mathematical Society.
[2] Alexander S. Kechris (1995) “Classical Descriptive Set Theory” Springer.
[3] David Marker (2002) “Descriptive Set Theory”.