無限ゲームで遊ぼう

でぃぐ

2018/7/15

数つくば第1回にて

Last update: 2018/7/15 20:23

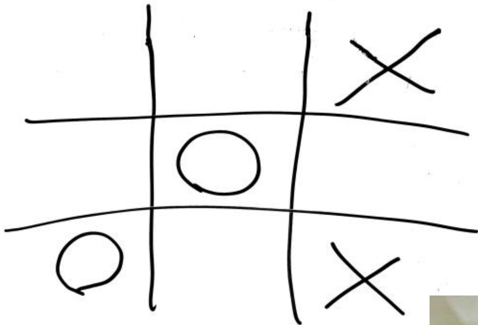
目次

§１有限ゲーム

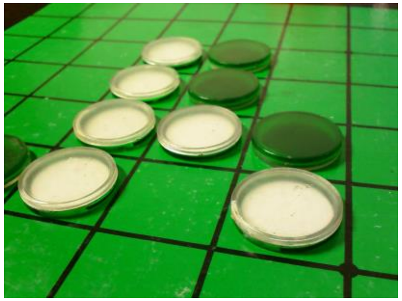
- この発表で扱うのは
  - 「二人**有限**確定完全情報ゲーム」(有限ゲーム)
  - 「二人**無限**確定完全情報ゲーム」(無限ゲーム)

の二つ

有限ゲームの例



- 3目並べ (〇×ゲーム)
- オセロ
- 将棋
- 囲碁
- チェス



画像:
https://en.wikipedia.org/wiki/Reversi#/media/File:Othello_(Reversi)_board.jpg (CC BY-SA 3.0)
https://en.wikipedia.org/wiki/Shogi#/media/File:Shogi_board_pieces_and_komadai.jpg (CC BY-SA 3.0)
https://en.wikipedia.org/wiki/Go_(game)#/media/File:FloorGoban.JPG (Public Domain)
https://en.wikipedia.org/wiki/Chess#/media/File:ChessSet.jpg (CC BY-SA 3.0)

二人有限確定完全情報ゲームの「二人」

- 二人のプレイヤーが交互に手を指す

二人有限確定完全情報ゲームの「確定」

- ゲームにランダム要素はない
- Ex. すごろくは確定でない

二人有限確定完全情報ゲームの「完全情報」

- それぞれのプレイヤーは互いのプレイヤーがこれまで指した手の情報を全て知れる

- Ex. ポーカーや麻雀などは完全情報でない

二人有限確定完全情報ゲームの「有限」

- ある自然数 N が存在して、ゲームは N ターン以内に必ず決着がつく
- ただし先手と後手がそれぞれ1手ずつ指すまとまりのことを1ターンと呼ぶことにする

- 3目並べは $N = 5$ (9/2 = 4.5 より)
- オセロは $N = 64$
- 将棋は $N \leq 4 \times$ (将棋の盤面の総数)

数学的定式化

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
(0を含む自然数全体の集合)

- かんたんのため引き分けのないゲームを扱う

- N を自然数、 A を$\mathbb{N}^{2N}$ の部分集合とする
- プレイヤーI(先手)とプレイヤーII(後手)は交互に自然数を言い合う (N 回)

Player I	x_0		x_1		x_2		…		x_{N-1}	
Player II		y_0		y_1		y_2		…		y_{N-1}

- こうしてできる長さ $2N$ の列 $z = (x_0, y_0, \ldots, x_{N-1}, y_{N-1})$ が A に入っていればIの勝ち、Aに入っていなければIIの勝ちとする

この定式化に対する疑問

- Q1. プレイヤーが指すのは、たとえば将棋なら どの駒をどこへ動かすかといったものであって、 自然数ではないのでは？

- A1. 指せる手にだぶりなく自然数を振って手と 自然数を同一視すればよい。

この定式化に対する疑問

- Q2. 指せる手が有限個の場合手と対応のつかない自然数が存在する。プレイヤーがこのような自然数を言った場合はどうする？

- A2. 手と対応のついていない自然数を言った時点でそのプレイヤーの負けとすればよい

この定式化に対する疑問

- Q3. この定式化だとちょうど N ターンプレイしないと決着しないように見える。

- A3. たとえばあるプレイにおいて N より小さい k ターン目でPlayer Iの勝ちがすでに決まるとしよう。このときは残りの $N-k$ ターンで両者がいかなる自然数を言ったとしてもPlayer Iの勝ちとなるように A を定めればよい。

戦略の定義

- Player Iの戦略とは写像

$$\sigma: \bigcup_{\substack{n<2N \\ n:\text{偶数}}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

のこと

- Player IIの戦略とは写像

$$\tau: \bigcup_{\substack{n<2N \\ n:\text{奇数}}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

のこと

つまり、それまでに両者が指したすべての手を見て次自分が指す手を決めるものが戦略

戦略に基づいてプレイしたときの結果

- Player Iが σ に基づき、Player IIが τ に基づいてプレイしたときの結果 $\sigma * \tau$ とは長さ $2N$ の列

$$\sigma * \tau = (x_0, y_0, \dots, x_{N-1}, y_{N-1})$$

であって

$$x_n = \sigma(x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}) \ (n \in \mathbb{N})$$
$$y_n = \tau(x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n) \ (n \in \mathbb{N})$$

を満たすもの

必勝戦略の定義

- σ がPlayer Iの必勝戦略とはPlayer IIの任意の戦略 τ に対して $\sigma * \tau \in A$ をみたすこと
- τ がPlayer IIの必勝戦略とはPlayer Iの任意の戦略 σ に対して $\sigma * \tau \notin A$ をみたすこと

必勝戦略の例：石取りゲーム

- 石が13個ある
- 各プレイヤーは自分の手番で石を1個か2個取る
- 残った石が0個になったとき最後にプレイしたものが負け

- このゲームは次のような後手の必勝戦略がある

$$\tau(x_0, y_0, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_n = 2 \\ 2, & x_n = 1 \end{cases}$$

Theorem (Zermelo, 1913)

有限ゲームにおいては次のどちらかが必ず成立する

- Player Iに必勝戦略がある
- Player IIに必勝戦略がある

復習：述語論理

- A を集合、 P を集合 A の元に対する条件とする

- A の任意の元 x について $P(x)$ が成立することを $\forall x \in A, P(x)$ と書く
- ある A の元 x があって $P(x)$ が成立することを $\exists x \in A, P(x)$ と書く
- 命題 Q に対してその否定を $\neg Q$ と書く

復習：述語論理 (例)

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y \ \ldots ①$$

と

$$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x < y \ldots ②$$

- ①は「どんなxについてもそれに応じて適当にyをとれば$x < y$とできる」の意味
  - つまりyはxに依存して決めてよい
  - よってこれは真の命題。$y = x + 1$とすればよいので
- ②は「あるyがあってどんなxについても$x < y$となる」の意味
  - つまりyはxに依存せず一様にとれないとダメ。
  - よってこれは偽の命題

復習：述語論理

- $\neg\forall x \in A, P(x)$ と $\exists x \in A, \neg P(x)$ は同値
- $\neg\exists x \in A, P(x)$ と $\forall x \in A, \neg P(x)$ は同値

これを述語論理におけるド・モルガンの法則という

復習：述語論理

例として

$$Q \equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$$

の否定を考えよう。

$$\neg Q \equiv \neg \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$$

に対しド・モルガンの法則を使うと

$$\neg Q \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \neg \exists y \in \mathbb{N}, x < y$$

もう一度ド・モルガンの法則を使うと

$$\neg Q \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \neg(x < y)$$

$x < y$ の否定は $x \geq y$ なので

$$\neg Q \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$$

復習：述語論理

したがって

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$$

の否定は

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$$

となる。

これを一般化すると ∀ や ∃ が入れ子になった命題を否定するには、∀ を ∃ に変え、∃ を ∀ に変え最後の条件を否定すればよいことがわかる。

定理の証明

主張: 有限ゲームにおいては次のどちらかが必ず成立する
- Player Iに必勝戦略がある
- Player IIに必勝戦略がある

Player Iに必勝戦略があることは次のように書ける

$$\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_{N-1} \forall y_{N-1} (x_0, y_0, \ldots x_{N-1}, y_{N-1}) \in A$$

(ただし x_i, y_i は自然数を動く)

0ターン目のうまい手x_0があって続く相手のどんな手y_0に対しても1ターン目のうまい手x_1があって続く相手のどんな手y_1に対しても… $N-1$ターン目のうまい手x_{N-1}があって続く相手のどんな手y_{N-1}に対しても先手が勝つ

定理の証明

主張: 有限ゲームにおいては次のどちらかが必ず成立する
- Player Iに必勝戦略がある
- Player IIに必勝戦略がある

他方でPlayer IIに必勝戦略があることは次のように書ける

$$\forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_{N-1} \exists y_{N-1} (x_0, y_0, \dots x_{N-1}, y_{N-1}) \notin A$$

(ただし x_i, y_i は自然数を動く)

0ターン目の相手のどんな手x_0に対しても続くうまい手y_0があって1ターン目の相手のどんな手x_1に対しても続くうまい手y_1があって… $N-1$ターン目の相手のどんな手x_{N-1}に対しても続くうまい手y_{N-1}があって後手が勝つ

定理の証明

主張: 有限ゲームにおいては次のどちらかが必ず成立する
- Player Iに必勝戦略がある
- Player IIに必勝戦略がある

Player Iが必勝:

$$\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_{N-1} \forall y_{N-1} (x_0, y_0, \ldots x_{N-1}, y_{N-1}) \in A$$

…①

Player IIが必勝:

$$\forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_{N-1} \exists y_{N-1} (x_0, y_0, \ldots x_{N-1}, y_{N-1}) \notin A$$

…②

①と②は互いの否定であるので①か②のどちらか一方が成立する。 □

引き分けのある有限ゲーム

Theorem

引き分けのあるゲームについて次の3つのいずれかが成り立つ

- Player Iが必勝戦略をもつ
- Player IとPlayer IIの双方が不敗戦略をもつ
- Player IIが必勝戦略をもつ

証明は同様にできる

現実の有限ゲーム

- 3目並べは双方に不敗戦略がある
- オセロ、将棋、囲碁、チェスでは定理の3つの場合のうちどれが成立するかは分かっていない

§2 無限ゲーム

無限ゲームの定義

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$は自然数の無限列全体の集合

A を$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の部分集合とする。

Player IとPlayer IIは交互に自然数を言い合う

Player I	x_0		x_1		x_2		…	
Player II		y_0		y_1		y_2		…

これを無限回続け結果得られる無限列 $\alpha = (x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$ が A に入っていればIの勝ち、A に入っていなければIIの勝ちとする

このゲームを $G(A)$ と書く

戦略の定義

- Player Iの戦略とは写像

$$\sigma : \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n:\text{偶数}}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

のこと

- Player IIの戦略とは写像

$$\tau : \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n:\text{奇数}}} \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

のこと

戦略に基づいてプレイしたときの結果

- Player Iが σ に基づき、Player IIが τ に基づいてプレイしたときの結果 $\sigma * \tau$ とは無限列
$$\sigma * \tau = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$$

であって
$$x_n = \sigma(x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})\ (n \in \mathbb{N})$$
$$y_n = \tau(x_0, y_0, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n)\ (n \in \mathbb{N})$$

を満たすもの

必勝戦略の定義

- σ がPlayer Iの必勝戦略とはPlayer IIの任意の戦略 τ に対して $\sigma * \tau \in A$ をみたすこと
- τ がPlayer IIの必勝戦略とはPlayer Iの任意の戦略 σ に対して $\sigma * \tau \notin A$ をみたすこと

かんたんな例

Player I (resp. II)が必勝戦略を持つことを略してPlayer I (resp. II)が勝つということにする

- $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のときPlayer Iが勝つ
- $A = \emptyset$ のときPlayer IIが勝つ
- $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \alpha(0) = 0\}$のときPlayer Iが勝つ
- $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \alpha(1) = 0\}$のときPlayer IIが勝つ
- $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \alpha$はある番号以降定数$\}$ のときPlayer IIが勝つ
- $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \alpha$は周期的な列$\}$のときPlayer IIが勝つ

αの第n項を$\alpha(n)$と書く

かんたんな例

<u>命題</u>

A が可算集合のときはPlayer IIが勝つ

復習：可算集合と非可算集合

- 集合 A に対し、Aの元から構成され自然数で番号付けられた列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$が存在しAのすべての元がこの列の要素となるとき A は可算集合という
- そうでない集合を非可算集合という

<u>Fact</u>

- 有限集合、自然数全体 $\mathbb{N}$、整数全体 $\mathbb{Z}$、有理数全体 $\mathbb{Q}$ は可算集合
- 実数全体 $\mathbb{R}$ や区間$[0,1]$ は非可算集合
- 自然数の無限列全体の集合$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$は非可算集合

命題

A が可算集合のときはPlayer IIが勝つ

証明

可算なので$A = \{\alpha_n | n \in \mathbb{N}\}$と書ける

Player IIの戦略τとしてnターン目に$\alpha_n(2n+1)$と異なる自然数を言うというものを考える。

このときPlayer Iがどんな戦略σをとろうが、$\beta = \sigma * \tau$ について

$$\beta(2n+1) \neq \alpha_n(2n+1)$$

なのでβ はどのα_nとも異なる。つまり$\beta \notin A$ □

無限ゲームの決定性

Player IかPlayer IIのどちらかに必勝戦略がある無限ゲームは決定的であるという

無限ゲームの決定性

Question

任意の無限ゲームは決定的？

Answer

選択公理の下ではNo

（IもIIも必勝戦略を持たないような無限ゲームが存在する）

無限ゲームの決定性

下に行くほど一般的な結果になっている

しかし性質の良い集合 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ については$G(A)$は決定的であることが知られている

- A が開集合または閉集合ならば$G(A)$は決定的 (Gale-Stewart, 1953)
- A がG_δ集合またはF_σ集合ならば$G(A)$は決定的 (Wolf, 1955)
- A が$G_{\delta\sigma}$集合または$F_{\sigma\delta}$集合ならば$G(A)$は決定的 (Davis, 1964)
- A が$G_{\delta\sigma\delta}$集合または$F_{\sigma\delta\sigma}$集合ならば$G(A)$は決定的 (Paris, 1972)
- A がボレル集合ならば$G(A)$は決定的 (Martin, 1975)

補足： $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$の位相

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ には次の距離で位相が入る:

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$に対し

$$d(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta \\ \dfrac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} | \alpha(n) \neq \beta(n)\} + 1}, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

(各$\mathbb{N}$を離散空間としてその直積位相を入れているといっても同じこと)

前ページの開集合、閉集合などはこの位相での意味

補足：ボレル階層

$$
\begin{tikzcd}
\text{開集合 (G)} \arrow[d, "\text{補集合}"] & F_\sigma\text{集合} \arrow[d, "\text{補集合}"] & G_{\delta\sigma}\text{集合} \arrow[d, "\text{補集合}"] & F_{\sigma\delta\sigma}\text{集合} \arrow[d, "\text{補集合}"] & \ldots \\
\text{閉集合 (F)} \arrow[ur, "\text{可算和}"] & G_\delta\text{ 集合} \arrow[ur, "\text{可算和}"] & F_{\sigma\delta}\text{ 集合} \arrow[ur, "\text{可算和}"] & G_{\delta\sigma\delta}\text{ 集合} & \ldots
\end{tikzcd}
$$

- 右に行くほど広い集合のクラスである
(たとえば開集合はF_σ集合でもありG_δ集合でもある)
- これら無限個のクラスのどれかに入っている集合をボレル集合という (正確にはそれより少し広い)

§3 Morton Davisのゲーム

Morton Davisのゲーム

端点が有理数であるような閉区間を有理閉区間という
(一点集合は除く)

A を実数の閉区間 $[0,1]$ の部分集合とする

- 0ターン目

Player Iは $[0,1]$ に含まれる有理閉区間 F_0 を言う

Player IIはF_0 の左半分または右半分の閉区間 F_1を言う

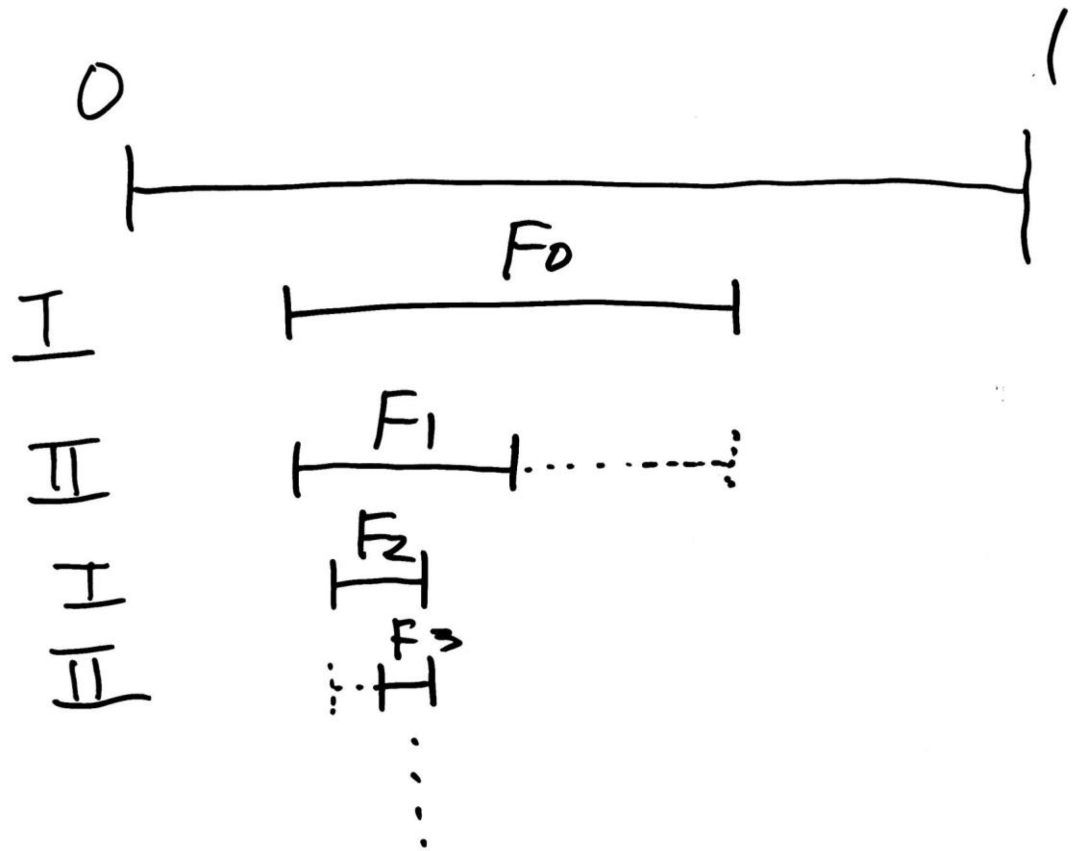
- 1ターン目

Player Iは F_1 に含まれる有理閉区間 F_2 を言う

Player IIはF_2 の左半分または右半分の閉区間 F_3を言う

以下同様

Morton Davisのゲーム



Morton Davisのゲーム

このゲームがプレイされると閉区間の縮小列

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4 \supseteq \cdots$$

ができてその長さは0に近づいていく

よって $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ は一点集合になる (区間縮小法の原理)

それを $\{a\}$ とする。

$a \in A$ ならPlayer Iの勝ち、$a \notin A$ ならPlayer IIの勝ちとする。

Morton Davisのゲーム

このゲームを$G^*(A)$と書く。これをMorton Davisのゲームという

<u>Remark</u>

$A \subseteq [0,1]$に対し適当に$A^* \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$を定めれば

ゲーム$G^*(A)$でI (resp. II)が必勝戦略をもつ

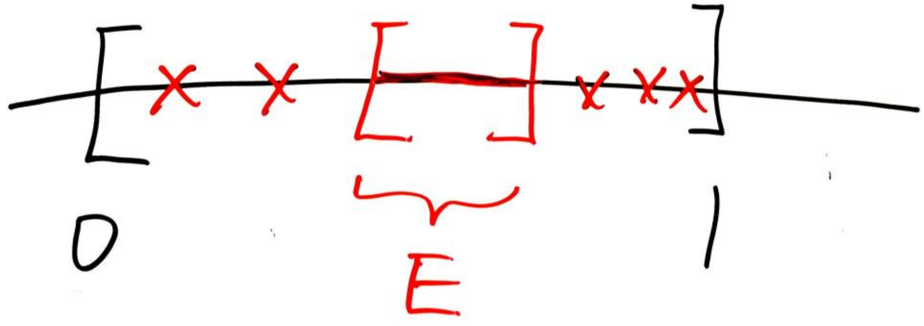
⇔ゲーム$G(A^*)$でI (resp. II)が必勝戦略をもつ

となるのでMorton Davisのゲームは§2で定義した無限ゲームの一種とみれる

例

$A \subseteq [0,1]$が何か区間Eを含むときPlayer Iが勝つ

なぜならば0ターン目でPlayer IがEに含まれるような有理閉区間を言えばあとは何をしてもPlayer Iが勝つから



例

$A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$のときPlayer IIが勝つ

“証明” (←ちょっとした間違いがある。後で正しい証明に直す)

Aが可算集合だから$A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$と書ける

Player IIはターンnにおいて直前にPlayer Iが言った区間Fに対しFの左半分か右半分のうちa_nの入っていない方を言う。

そうすればF_{2n+1}にはa_nが入らないから$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$にはどの$a_n$も入らない。つまりプレイの結果得られる実数$a$は$A$に入らない。 □

例

$A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$のときPlayer IIが勝つ

前ページの証明には少し間違いがある

直前にPlayer Iが言った区間Fの中点がたまたまa_nだった場合には前の証明はうまくいかない

しかし次のように修正すればよい:

nターン目でa_nを排除するかわりに$2n$ターン目と$2n+1$ターン目の2つのターンを使ってa_nを排除する

例

さっきの証明では$A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$が可算集合なことしか使わなかった

よって$A \subseteq [0,1]$が可算であればさっきの証明が通用する

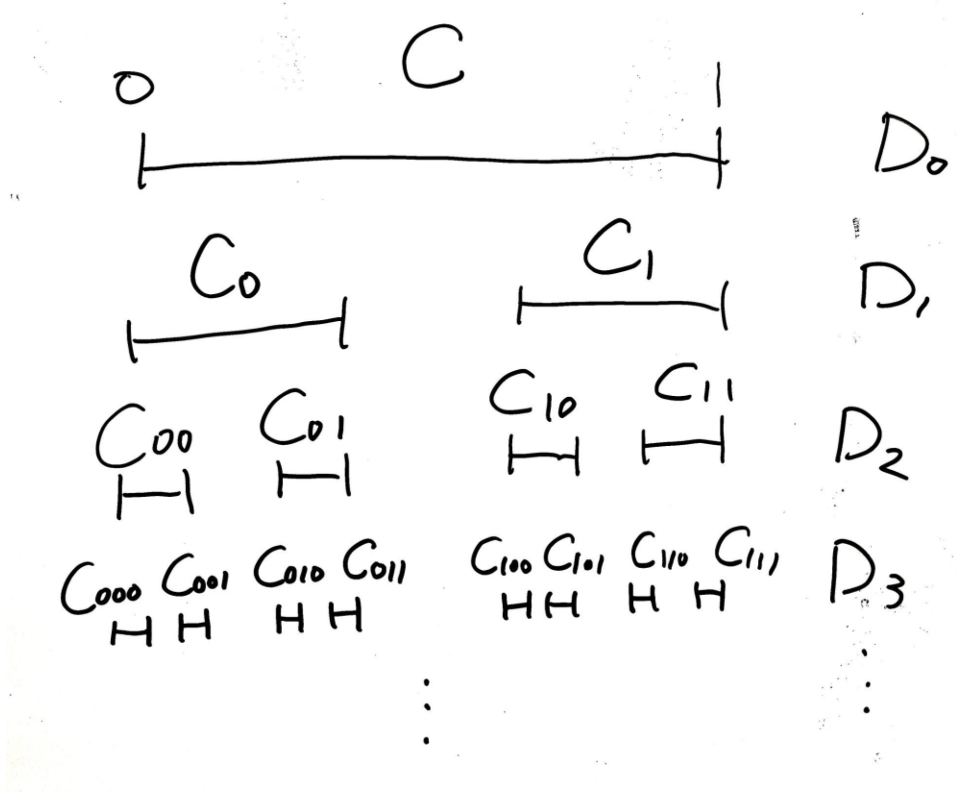
つまり

$A \subseteq [0,1]$が可算集合 ⇒ Player IIが勝つ

が成立

例

カントール集合$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$を考える:



例

カントール集合Dについてゲーム$G^*(D)$はPlayer Iが勝つ

<u>証明</u>

Player Iは毎ターンC_tのどれかを言う (t: 二進有限列)

前のターンでIが言った区間がC_tであるとする。

続いてIIがその左半分の区間を言った場合$C_{t\hat{}0}$を言い、IIが右半分の区間を言った場合は$C_{t\hat{}1}$を言う

(ただし$t\hat{}b$は有限列tの後ろにbを連結した列を表す)

するとプレイの結果の実数aはカントール集合Dの元となるのでPlayer Iが勝つ □

実は以下が知られている

Theorem (Morton Davis, 1964)

$A \subseteq [0,1]$ に対し次が成り立つ

- $G^*(A)$においてPlayer Iに必勝戦略がある
  $\Leftrightarrow$ Aがカントール集合と同相な部分集合を含む
- $G^*(A)$においてPlayer IIに必勝戦略がある
  $\Leftrightarrow$ Aが可算集合

Morton Davisのゲームの応用

$A \subseteq [0,1]$ がボレル集合なら対応する$A^* \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ もボレルである。

このこととボレル集合で定められる無限ゲームが決定的であることを使うと次を得る

Theorem

$A \subseteq [0,1]$ がボレル集合なら次のどちらかが成立する

- A はカントール集合と同相な集合を含む
- A は可算集合である

Morton Davisのゲームの応用

ここから次が言える:

Corollary

$\mathbb{R}$のボレル部分集合は可算集合 (すなわち要素の個数が自然数の個数以下)か連続体濃度を持つ (すなわち個数が実数の個数と同じ)

これは連続体仮説 (可算濃度と連続体濃度の中間の濃度はない)の反例はボレル集合では作れないことを示している

まとめ

- 有限ゲームは決定的
- 無限ゲームは必ずしもそうではない
- しかし性質の良い集合 (ボレル集合)は決定的
- Morton Davisのゲームを使うとゲームが決定的なことと連続体仮説が結び付く

参考文献

1. Yiannis N. Moschovakis “Descriptive Set Theory” 2009
2. Yurii Khomskii “Infinite Games” 2010
3. 田中尚夫『決定性公理に関する最近までの諸結果について －無限ゲームの理論－』1977
4. 藤田博司『て日々』 2012年10月2日の記事 http://www.tenasaku.com/tenasaku/tepipi/diary201210.html#diary20121002
5. 田崎晴明『数学：物理を学び楽しむために』

補足：必勝戦略の計算可能性について

- Zermeloの定理で存在が保証された必勝戦略は必ずしもプログラムで書ける戦略とは限らない
- つまり有限ゲームであって A が計算可能で後手必勝なことが分かっているのにも関わらずその必勝戦略が計算可能でないものがある
- ここでAが計算可能とは自然数の有限列が与えられたときそれがAに属しているかどうかを判定するプログラムが存在すること

準備：Hintikkaのゲーム

たとえば、$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$と$a \in \mathbb{R}$を固定して次の命題を考える

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

この命題に応じて次のゲームを考える

1. Player ∀ は実数$\varepsilon > 0$を言う
2. それに応じてPlayer ∃ は実数$\delta > 0$を言う
3. それに応じてPlayer ∀ は実数xを言う
4. こうして決まった実数ε, δ, xに対して$|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$が正しい場合Player ∃ の勝ちでそうでなければPlayer ∀ の勝ち

準備：Hintikkaのゲーム

このゲームにおいて次が成立

- Player ∃ が必勝戦略を持つ⇔fが点aにおいて連続

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ という論理式以外でも同様のゲームが考えられ、やはりPlayer ∃ が勝つのはその論理式が正しい場合となる

これをHintikkaのゲームという

Decision ゲーム

- さっきは変数が実数の範囲を動くHintikkaゲームを考えたが、これからは自然数の範囲を動くものを考える
- 記号として変数、定数、＋(足し算)、×(掛け算)、=(等号)、不等号(<, >, ≤, ≥)、論理記号(∧,∨ ,¬, →, ∀, ∃) のみを許した論理式を算術の論理式と呼ぶことにする

Decision ゲーム

さて、次のゲームを考えよう

- Player I (先生)は算術の閉論理式φを言う
  ただしφに出てくる量化記号は10000個以下とする (制限しないと有限ゲームにならないから)
  - (また有界な量化はこれにカウントしないことにする)
- Player II(学生)は「True」か「False」を言う
- Trueを言った場合Player II (学生)が∃役、Falseを言った場合、Player II (学生)が∀役で論理式φに関してHintikkaゲームを行う
- Hintikkaゲームに勝った方がこのゲームの勝者である

Decision ゲーム (例)

先生

$\forall n, \exists x, y, z, (x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq n)$

True

学生

$n = 100$

$(x, y, z) = (99,20,101)$

このプレイは学生の勝ち！

($99^2 + 20^2 = 10201 = 101^2$かつ$101 \geq 100$が成り立っているため)

Decision ゲーム

- このゲームはPlayer II (学生)に必勝戦略がある
- なぜなら、Player I (先生)が言った閉論理式φが正しい場合「True」、そうでない場合「False」と言い、そのあとのHintikkaゲームは存在命題の証拠を言っていけばよいから
- またこのゲームを定める集合 A は計算可能である
- ところがPlayer II (学生)のもつ必勝戦略は計算可能でない

Decision ゲーム

- 実際、Player IIの計算可能な必勝戦略があったとしたら、そこから「与えられた算術の閉論理式が正しいかどうか判定する」プログラムが得られる
- ところがそういうプログラムの存在はゲーデルやチューリングの結果に矛盾する