濃度と順序数

June 21, 2016

話すこと

- 順序数の定義と性質
- 整列可能定理
- 濃度の矛盾のない定義
- Zorn の補題の証明

復習：濃度の定義

- **集合 $|A|$ の濃度とは**

復習：濃度の定義

- 集合 $|A|$ の濃度とは
- 集合全体の集まりにおける対等関係という同値関係の A の同値類のことである

問題点

- 「集合全体の集まり」などと口を濁しているが，要するに「集合全体の集合」を考えている
- しかし「集合全体の集まり」は集合にはなれない．

カントールのパラドックス

定理 1

集合全体の集まりは集合ではない

カントールのパラドックス

定理 1

集合全体の集まりは集合ではない

証明.

V を集合全体の集合とする．このときべき集合 $\mathcal{P}(V)$ は集合の集合なのだから $\mathcal{P}(V) \subseteq V$．よって $|\mathcal{P}(V)| \leq |V|$．一方，カントールの定理より $|V| < |\mathcal{P}(V)|$．ここに矛盾した． $\square$

- このように「集合全体の集まり」のように大きすぎるものの集まりは集合にならない
- そこで矛盾のおきない濃度の定義が必要
- それには順序数という概念を用いる

定義 2

順序集合 X は，すべての空でない部分集合が最小元をもつとき，整列集合という

命題 3

整列集合 X は全順序集合である.

命題 3
整列集合 X は全順序集合である．

証明.
任意の 2 要素 $a, b \in X$ をとる．整列集合の定義より，$\{a, b\}$ には最小元があるので，$a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つ．よって X は全順序集合． $\square$

整列集合の例

- $\mathbb{N}$ は整列集合
- 任意の有限の全順序集合は整列集合
- $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ は整列集合でない

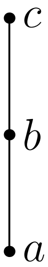
- **順序数とは，おおざっぱには「整列集合」の長さを測るための数のこと．**

- 順序数が定義されたあかつきには，整列集合 X の型 (長さのことを型という) を $\operatorname{type} X$ と書いて，
$X \simeq Y \iff \operatorname{type} X = \operatorname{type} Y$
が成立するようになる.

- 整列集合同士に X が Y より短いという関係も定義されるのだが，それは $\mathrm{type}\,X < \mathrm{type}\,Y$ と同値になる

- **なお，「順序数とは整列集合全体における順序同型という同値関係による同値類のこと」と定義したいが，それもやはり大きすぎる集合を考えることになってダメ．**

- 順序数の正確な定義はまだだがイメージを持ってもらおう．
- 要素数 3 の整列集合というのは以下のハッセ図のものしかない．



- よって要素数 3 の整列集合の型のことを 3 と呼ぶ．

- 同様にして自然数 n に対して，要素数 n の整列集合の型のことを n と呼ぶ．

- 同様にして自然数 n に対して，要素数 n の整列集合の型のことを n と呼ぶ．
- このようにして順序数というのは自然数をすべて含んでいる．

- 同様にして自然数 n に対して，要素数 n の整列集合の型のことを n と呼ぶ．
- このようにして順序数というのは自然数をすべて含んでいる．
- 順序数というのは自然数が持つ「番号を振る」という目的を無限方向に拡張したものだといえる．

- **整列集合 $\mathbb{N}$ の型は ω と書かれる．これは最小の無限順序数である．**

- 整列集合 $\mathbb{N}$ の型は ω と書かれる．これは最小の無限順序数である．
- 順序数を小さい方から順に並べると $0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \ldots$ となる

- 整列集合 $\mathbb{N}$ の型は ω と書かれる．これは最小の無限順序数である．
- 順序数を小さい方から順に並べると $0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega 2, \omega 2+1, \ldots$ となる
- 今並べたのは順序数のうちほんの小さい部分にすぎない．もっと大きい順序数がまだまだある

命題 4

整列集合 X から無限強単調減少列 $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ はとれない．

命題 4

整列集合 X から無限強単調減少列 $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ はとれない．

証明.

$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ がとれると仮定する．すると X の部分集合 $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ には最小元がないため整列性に反する． $\square$

命題 5

順序集合 $X \neq \varnothing$ が整列集合であるためには，全順序集合であって無限強単調減少列 $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ がとれないことが必要十分．

定義 6

整列集合 X とその要素 $a \in X$ に対して，

$$X(a) := \{x \in X | x < a\}$$

を X の a による切片という．

切片の例

- **整列集合** $X = \{0, 1, 2\}$ **において**
- $X(0) = \varnothing$
- $X(1) = \{0\}$
- $X(2) = \{0, 1\}$

補題 7

整列集合の部分集合への順序同型

$f : (X, \leq) \to f(X) \subseteq X$ **があれば**

$$x \leq f(x) \; (\forall x \in X)$$

定理 8

1. **整列集合はどの切片とも順序同型でない**

定理 8

1. **整列集合はどの切片とも順序同型でない**
2. **整列集合から自身への順序同型は恒等写像に限る**

定理 8

1. **整列集合はどの切片とも順序同型でない**
2. **整列集合から自身への順序同型は恒等写像に限る**
3. **整列集合の間の順序同型はあるとしてもひとつしかない**

順序数の定義のアイデア

- 順序数とは「それより小さい順序数全体の集合である」ということが成り立つような定義をする
- このアイデアは John von Neumann によるものである．

定義 9

整列順序集合 $(X, \preceq)$ であって

$$X(x) = x \quad (\forall x \in X)$$

をみたすものを順序数という

例

- たとえば集合 $X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ に $\varnothing \prec \{\varnothing\}$ なる順序 $\preceq$ を入れる
- $X(\varnothing) = \varnothing$
- $X(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\}$
- となるので X は順序数である．

命題 10

順序数 $(\kappa, \preceq)$ において

$$x \prec y \iff x \subsetneq y$$

が成立する．

証明.

$$\begin{aligned} x \prec y &\iff \kappa(x) \subsetneq \kappa(y) \\ &\iff x \subsetneq y \end{aligned}$$

より成立． $\square$

命題 10

順序数 $(\kappa, \preceq)$ において

$$x \prec y \iff x \subsetneq y$$

が成立する．

この命題により，順序数 $(\kappa, \preceq)$ において順序関係 $\preceq$ はつねに $\subseteq$ と同値になるので，順序関係 $\preceq$ をあえて指定する必要はない．よってこれからは順序数 $(\kappa, \preceq)$ を順序数 κ と書く．

定理 11

順序数 κ の切片はすべて順序数である

系 12

順序数 κ の要素はすべて順序数である

定理 13

相異なる順序数に対して一方は他方の切片である

定理 14

二つの順序数 κ, τ が順序同型なら実は $\kappa = \tau$ である.

定理 15

任意の整列集合はただ一つの順序数と順序同型である

整列集合 X に対してこの順序数のことを $\mathrm{type}\, X$ と書く．

以上で整列集合と順序数の定義と性質を終える.

定理 16 (整列可能定理)

任意の集合 X は整列可能．

すなわち，X にある順序関係 $\preceq$ を入れることで $(X, \preceq)$ は整列順序集合になる．言い換えるとある順序数と X には全単射が作れる．

整列可能定理の証明

- X に属さない元 θ を一つとる．
- 選択公理により，写像
  $f : \mathcal{P}(X) \to X \cup \{\theta\}$ で

$$f(\varnothing) = \theta$$

$$\varnothing \neq A \subseteq X \Rightarrow f(A) \in A$$

となるものをとれる．

整列可能定理の証明

- $x_0 = f(A)$
- $x_1 = f(A - \{x_0\})$
- $x_2 = f(A - \{x_0, x_1\})$
- $\vdots$
- $x_\alpha = f(A - \{x_\beta : \beta < \alpha\})$
- $\vdots$
- と帰納的に定める．

整列可能定理の証明

- このとき $x_\tau = \theta$ となる τ が存在する．
- すると $X = \{x_\alpha : \alpha < \tau\}$ となり，X は整列された．$\square$

濃度の定義

定理 17 (Zorn の補題)

X を空でない部分集合とする．X の任意の鎖は上界をもつとする．このとき X には極大元が存在する．

Zorn の補題の直観的証明

- $x_0 \in X$ を一つとる．x_0 が極大元なら証明終了．
- そうでないなら $x_1 > x_0$ をとれる．x_1 が極大元なら証明終了．
- そうでないなら $x_2 > x_1$ をとれる．x_2 が極大元なら証明終了．

Zorn の補題の直観的証明

- 同様に続けて $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ が得られて，まだ極大元がないとする．
- すると $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ は X の鎖なのでその上界 x_ω がとれる．
- x_ω が極大元なら証明終了．そうでなければ $x_{\omega+1} > x_\omega$ がとれる．
- 同様のことを繰り返せばいつか極大元が見つかるであろう． $\square$

ちゃんとした証明もつけます

Zorn の補題の証明

- X から X への写像 $^+$ で次を満たすものを考える.

$$x^+ > x \text{ (もし } x \text{ が極大元でないとき)}$$
$$x^+ = x \text{ (もし } x \text{ が極大元のとき)}$$

- 選択公理よりこのような写像 $^+$ を一つとれる.

Zorn の補題の証明

- X の元の広義単調増加列 (x_α) (α: 順序数) を次のように帰納的に定める.
- $x_0 = (X$ の元の一つ$)$
- $x_{\beta+1} = {x_\beta}^+$
- $x_\alpha = ($鎖 $(x_\beta)_{\beta<\alpha}$ の上界の一つ$)$ (α が極限順序数のとき)

Zorn の補題の証明

- X に極大元がないと仮定する
- すると列 (x_α) は狭義単調増加列になる
- このとき順序数全体が X のある部分集合と 1 対 1 に対応する
- しかし，順序数全体は集合にならないのでこれは矛盾 $\square$

参考文献

- 寺澤順 『現代集合論の探検』
- “ alg_d による「選択公理⇒ Zorn の補題」の概略 ” `http://togetter.com/li/967760`
- Ken Brown “ Zorn’ s Lemma ” `http://www.math.cornell.edu/~kbrown/6310/zorn.pdf`